Zur gruppentheoretischen Ausreduktion niederer Näherungen in der funktionalen nichtlinearen Spinortheorie der Elementarteilchen

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Hans-Georg Märtl
aus Berlin

1970

1969

Zur gruppentheoretischen Ausreduktion niederer Näherungen in der funktionalen nichtlinearen Spinortheorie der Elementarteilchen

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Hans-Georg Märtl
aus Berlin

1970

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung : 22. Mai 1969

Dekan: Prof. Dr. A. Seilacher

1. Berichterstatter: Prof. Dr. H. Stumpf

2. Berichterstatter: Prof. Dr. E. Schmid

An dieser Stelle danke ich zuerst meinen Eltern, die durch große persönliche Opfer mein Studium ermöglichten.
Herrn Prof. Dr. H. Stumpf schulde ich besonderen Dank für die Stellung des Themas und die Betreuung der Arbeit, sowie für die Möglichkeit, die Arbeiten an seinem Institut durchzuführen.
Meinen Kollegen, insbesondere Herrn Dr. W. Schuler, bin ich für manche anregende Diskussionen verpflichtet.

Inhaltsverzeichnis

Seite

Einleitung VI

1. Grundlagen

1.1. Nichtlineare Spinortheorie mit hermiteschen und nichthermiteschen Feldoperatoren 1

1.2. Funktionale Formulierung der nichtlinearen Spinortheorie 12

1.3. Unsymmetrisierte und symmetrisierte HERMITE-Darstellung 19

2. Relativistische Mehrteilchengleichungen

2.1. Das Baryonengleichungssystem 25
2.1.1. Ausreduktion bzgl. der Baryoneneichgruppe
2.1.2. Ausreduktion bzgl. der Isospingruppe

2.2. Die Bosonengleichung 40
2.2.1. Ausreduktion nach der Baryoneneichgruppe
2.2.2. Ausreduktion nach der Isospingruppe

3. Drehimpulse in relativistischen Theorien

3.1. Darstellungen der POINCARÉ-Gruppe 50
3.1.1. Kanonische Form der Darstellungen
3.1.2. Spinordarstellungen

3.2. Ausreduktion von Produktdarstellungen 54
3.2.1. Freie Felder
3.2.2. Wechselwirkende Felder

Seite

4. Spin-Ausreduktion relativistischer Mehrteilchen-gleichungen

4.1. Darstellungen der Baryonen- und Bosonenamplituden 61

4.2. Spin-Ausreduktion der Baryonengleichungssysteme 64

4.3. Spin-Ausreduktion der Bosonengleichungen 76

4.4. Die "Deuteronen"-Gleichung 82

Anhang

Anhang I : Zur Definition von Funktionalen auf Fermifeldern 86

Anhang II: Unsymmetrisierte HERMITE-Gleichungen in niedrigster Näherung 92

Anhang III : Definitionen 95

Anhang IV : Bezeichnungen 101

Literatur 105

Einleitung

In der nichtlinearen Spinortheorie der Elementarteilchen kann die Dynamik der Elementarteilchensysteme durch Funktionale von Feldoperatoren eines Urfeldes beschrieben werden, wobei die physikalischen Funktionale Lösungen von Funktionaldifferentialgleichungen bzw. -integralgleichungen sind, die aus der fundamentalen Feldgleichung [1] folgen. Die Lösung dieser Funktionalgleichungen muß für den Fall der starken Kopplung aufgesucht werden, d.h. unter Verzicht auf störungstheoretische Ansätze. Wie von STUMPF et al. [2, 3, 4, 5, 6] in mehreren Arbeiten diskutiert wurde, ist der anharmonische Oszillator ein geeignetes Modellproblem für die nichtlineare Spinortheorie, so daß die für dieses Modell entwickelten Methoden auf die Spinortheorie angewendet werden können, nachdem sie an den im Prinzip exakten, aus der SCHRÖDINGERtheorie bekannten Lösungen der Gleichungen für den anharmonischen Oszillator erprobt wurden. [7]

Die Grundidee zur Lösung solcher Funktionalgleichungen besteht darin, die physikalischen Funktionale, welche Lösungen der Gleichungen sein sollen, in Reihen nach geeignet zu wählenden Basisfunktionalen zu entwickeln, und die exakten unendlichen Reihen durch endliche Summen zu approximieren. Eine vollständige Theorie erforderte sodann den Beweis der Konvergenz dieses Verfahrens für die nichtlineare Spinortheorie. Dieser Beweis steht bisher zwar noch aus, doch sind die inzwischen erzielten Resultate sehr ermutigend.

In dieser Arbeit soll dieses letzte Problem nicht behandelt werden. Vielmehr soll hier nur der erste Teil des Problems angegangen werden, d.h. es sollen durch Entwicklung nach speziellen Basisfunktionalen, den sog. HERMITE-Funktionalen, Gleichungen abgeleitet werden, die im Prinzip eine Konstruktion des approximativen physikalischen Funktionals erlauben. Zuvor wird jedoch das Problem untersucht, wie aus der in jenem Sinne "unsymmetrisierte" Feldgleichung, als durch sie eine bestimmte Koordinate ausgezeichnet wird, eine symmetrisierte Funktionalgleichung gewonnen werden kann, deren Lösungen den richtigen Zusammenhang zwischen Spin und Statistik liefern.

Als Ergebnis folgt, daß wir in dem vollen Gleichungssystem in der zweiten Ordnung der Neuen-Tamm-Dancoff-Näherung (NTD) für die 3-Punktfunktion eine einzige Gleichung erhalten, die nach ihrer Struktur die experimentellen Befunde richtig wiedergibt. Im Gegensatz dazu erhielt man z.B. in [2] ein System von 3 Gleichungen, aus denen durch zusätzliche physikalische Argumente eine Gleichung mit der richtigen Struktur ausgewählt werden muß.

Den Gegenstand der weiteren Untersuchungen bildet die Diskussion der in der zweiten NTD-Näherung für Baryonen und Bosonen erhaltenen Gleichungen. Ihre gruppentheoretischen Eigenschaften sollen dazu benutzt werden, Gleichungen zu gewinnen, die für Baryonen und Bosonen Lösungen mit beliebigem halb- oder ganzzahligem Spin enthalten, und nicht nur solche mit Spin und Isospin 1/2 für Baryonen oder Spin und Isospin 0 oder 1 für Bosonen, wie sie in den niedrigsten Näherungen auftreten. Da seltsame Teilchen hier nicht betrachtet werden, ist das verwendete Vakuum das gewöhnliche Vakuum der Feldtheorie.
Die Behandlung des vollen Gleichungssystems für Baryonen, bzw. einer höheren Näherung für Bosonen, bringt eine zweifache Komplikation mit sich.
Die erste Komplikation betrifft die analytische Struktur der Gleichungen, die im Gegensatz zu den früher betrachteten niedrigsten Näherungen echte Integralgleichungen sind.
Die anderen Schwierigkeiten sind algebraischer Art und besitzen mehr praktische als prinzipielle Bedeutung. Sie rühren her von der notwendig werdenden Drehimpulsausreduktion der relativistischen Gleichungen. Um die mühseligen und langwierigen Rechnungen zu bewältigen, und die Ergebnisse in möglichst kompakter Form darzustellen, werden vorwiegend graphische Methoden benutzt, deren Grundlage eine graphische Symbolik für höhere WIGNERsche 3nj-Symbole bildet. [8, 9]
Die Lösung der Integralgleichungen selbst stellt noch eine sehr schwierige Aufgabe dar, die sowohl weiterer prinzipieller Untersuchungen als auch einer gewaltigen Rechenarbeit bedarf. Sie soll hier nicht in Angriff genommen werden.
Im ersten Abschnitt formulieren wir die Grundlagen der nichtlinearen Spinortheorie mit hermiteschen und nichthermiteschen Feldoperatoren und geben sodann sowohl die allgemeine funktionale Darstellung als auch eine spezielle mit HERMITE-Funktionalen. Im zweiten Abschnitt werden die Baryonen- und Bosonengleichungen nach der Baryoneneichgruppe sowie der Isospingruppe ausreduziert, und die Gleichungen zu bestimmten Quantenzahlen der Baryonenzahl und des Isospins angegeben. Im dritten Abschnitt diskutieren wir kurz die gruppentheoretischen Grundlagen der Spinbeschreibung in relativistischen Theorien. Im letzten Abschnitt werden schließlich die zuvor skizzierten Methoden zur Drehimpulsausreduktion der Gleichungssysteme verwendet und als Beispiel die explizite ausreduzierte Form der Gleichung für einen möglichen Deuteronzustand angegeben.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547612_0119

1. Grundlagen

1.1. Nichtlineare Spinortheorie mit hermiteschen und nichthermiteschen Feldoperatoren. [1,2]

In der üblichen nichthermiteschen Darstellung der HEISENBERGschen nichtlinearen Spinortheorie der Elementarteilchen geht man von Feldgleichungen der Form

$$D_{\alpha'\alpha}\,\psi_{\alpha}(x) = V_{\alpha'\beta',\alpha\beta} : \psi_{\alpha}(x)\,\psi_{\beta}(x)\,\psi^{*}_{\beta'}(x) : \tag{1.1a}$$

$$D_{\alpha'\alpha}\,\psi^{*}_{\alpha'}(x) = V_{\alpha'\beta',\alpha\beta} : \psi_{\beta}(x)\,\psi^{*}_{\beta'}(x)\,\psi^{*}_{\alpha'}(x) : \tag{1.1b}$$

für nichthermitesche lokale Feldoperatoren $\psi_{\alpha}(x)$ und $\psi^{*}_{\alpha}(x)$ aus, deren Antikommutator wegen der Forderung relativistischer Mikrokausalität für raumartige Abstände verschwindet. Bezüglich ihres Transformationsverhaltens sind die Feldoperatoren 4-komponentige WEYLsche Spinor-Isospinoren, wobei sich die gestrichenen Indizes mit der komplex konjugierten Darstellung transformieren. Speziell bei Lorentztransformationen unterscheiden sich die gestrichenen von den ungestrichenen Indizes wie die gepunkteten von den nichtgepunkteten Indizes in der VAN-DER-WAERDENschen Schreibweise. [10]
$D_{\alpha'\alpha}$ ist ein hermitescher Differentialoperator 1. Ordnung von der allgemeinen Form

$$D_{\alpha'\alpha} = i\,\Gamma^{\mu}_{\alpha'\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \tag{1.2}$$

wo $\Gamma^{\mu}_{\alpha'\alpha}$ eine Matrix ist, die sich wie einen Vierervektor bei Lorentztransformationen verhält.

$V_{\alpha'\beta',\alpha\beta}$ ist ein ableitungsfreier lokaler Vertexausdruck, der ohne Einschränkung der Allgemeinheit als FIERZ-symmetrisch, d.h. als antisymmetrisch sowohl in den gestrichenen als auch in den ungestrichenen Indizes vorausgesetzt werden kann. [11]
Er kann stets in der Gestalt geschrieben werden:

$$V_{\alpha'\beta',\alpha\beta} = \ell^{2}\,\bar{V}_{\alpha'\beta',\alpha\beta} \tag{1.3}$$

ℓ^2 bedeutet hier eine Kopplungskonstante von der Dimension des Quadrats einer Länge.
Die Doppelpunkte an den nichtlinearen Termen in (1. 1a, b) symbolisieren, daß das Produkt von Feldoperatoren am selben Raum-Zeit-Punkt als verallgemeinertes WICK-Produkt definiert wird, d. h. als zeitgeordnetes Produkt, von dem alle Vakuum-Zweipunktfunktionen abgezogen sind. Es gilt also in symbolischer Schreibweise:

$$V_{\alpha'\beta',\alpha\beta} : \psi_\alpha \psi_\beta \psi^*_{\beta'} : \; = \; V_{\alpha'\beta',\alpha\beta} \left[T\, \psi_\alpha \psi_\beta \psi^*_{\beta'} - 2 F_{\beta\beta'} \psi_\alpha \right] \qquad (1.4)$$

Dabei wurde die Antisymmetrie von $V_{\alpha'\beta',\alpha\beta}$ benutzt, und $F_{\beta\beta'}$ bedeutet hier die Zweipunktfunktion an der Stelle 0.
Für gewöhnlich setzt man

$$\Gamma^\mu_{\alpha'\alpha} \; := \; (I\,\sigma^\mu)_{\alpha'\alpha} \equiv \delta_{\alpha'_1\alpha_1}\, \sigma^\mu_{\alpha'_2\alpha_2} \qquad (1.5)$$

wo $\sigma^\mu = (I, \vec{\sigma})$ die PAULI-Matrizen sind, die in (1. 5) noch mit einer Einheitsmatrix I im Isospinraum zu multiplizieren sind. (Mit dem Index "1" versehene Indizes beziehen sich hier auf den Isospinraum, die mit "2" bezeichneten auf den Spinraum.)
Die Vertex-Matrix ist explizit durch:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{\alpha'\beta',\alpha\beta} \; &:= \; \left\{ \tfrac{1}{4} \left(3\, II + \vec{\tau}\cdot\vec{\tau} \right) \sigma^\mu \sigma_\mu \right\}_{\alpha'\alpha,\,\beta'\beta} \\ &\equiv \tfrac{1}{4} \left(3\, \delta_{\alpha'_1\alpha_1} \delta_{\beta'_1\beta_1} + \vec{\tau}_{\alpha'_1\alpha_1} \cdot \vec{\tau}_{\beta'_1\beta_1} \right) \sigma^\mu_{\alpha'_2\alpha_2}\, \sigma_{\mu,\beta'_2\beta_2} \end{aligned} \qquad (1.6)$$

gegeben.
Wenn man der von HEISENBERG vorgeschlagenen Trennung zwischen fundamentalen Gruppen und anderen Symmetrien, die aus der Dynamik des Systems resultieren, folgt, so scheinen (1. 1a, b) die einfachsten Feldgleichungen zu sein, welche alle geforderten Symmetrien besitzen. Dabei werden in der nichtlinearen Spinortheorie die eigentliche inhomogene Lorentzgruppe (POINCARÉ-Gruppe), die Isospingruppe, die zur Gruppe SU (2, c) isomorph ist, sowie zwei Eichgruppen zur Darstellung

von elektrischer und Baryonenladung als exakte Symmetrien betrachtet. Die empirische Tatsache der Gültigkeit von SU(3, c)-Symmetrie in einigen Teilen des Elementarteilchenspektrums wird, wie auch die höheren Symmetrien, als angenäherte dynamische Symmetrie interpretiert. Wegen der Gründe für diese Wahl, sowie für das Problem der Fasterhaltungssätze sei auf [1] verwiesen. Insgesamt besitzt also (1. 1a, b) eine 15-parametrige Symmetriegruppe, welche die Erhaltung von Energie-Impuls, der Schwerpunktsbewegung, des Drehimpulses, ferner der elektrischen Ladung und der Baryonenzahl garantiert. Eine Symmetrie bezüglich der vollen Lorentzgruppe ist nicht zu erwarten, da sie durch einen 2-komponentigen WEYL-Spinor nicht dargestellt werden kann. Schließlich folgt noch aus dem Theorem von LÜDERS [12] und PAULI [13] , daß die Gleichung auch gegenüber PCT bzw. PGJT invariant ist. Außerdem noch gegenüber PG, PC und T, jedoch nicht P, G oder C einzeln.

Die Nichthermitezität der Feldoperatoren $\psi_\alpha(x)$ wiederspiegelt unmittelbar eine ladungsartige Eigenschaft der Fermionen, z.B. die Baryonenzahl. Es ist jedoch stets möglich [14, 15] durch Verdopplung der Komponentenzahl formal anstelle nichthermitescher Operatoren hermitesche Felder einzuführen. Zwar hat das den Nachteil, daß die unmittelbare physikalische Anschaulichkeit der Wirkung der Operatoren ψ_α bzw. ψ_α^* auf das Vakuum verlorengeht, da die Anwendung hermitescher, 8-komponentiger Feldoperatoren Ψ_α eine unphysikalische Überlagerung von Teilchen-Antiteilchenzuständen liefert, und damit, weil die Baryonenzahl in der nichtlinearen Spinortheorie eine gute Quantenzahl ist, eine gruppentheoretische Ausreduktion nach den Darstellungen der Baryoneneichgruppe notwendig wird. Andererseits bringt die hermitesche Formulierung auch eine Reihe von Vorzügen. Sie erlaubt zunächst die eindeutige Zuordnung zwischen topologischen Graphen und Integralausdrücken, so daß viele Rechenschritte bei detaillierten Rechnungen wenn auch nicht explizit ausgeführt, so doch übersichtlich dargestellt werden können. Ferner ist zu betonen, daß die Systeme von Differential- bzw. Integralgleichungen für die Matrixelemente von in relativistisch invarianter Weise geordneten Operatorprodukten formal jenen ähnlich werden, die man am Modellfall des anharmonischen Oszillators erhält, und an denen in letzter Zeit von H.STUMPF und W.SCHULER Lösungsmethoden diskutiert wurden. [16]
Anstelle der nichthermiteschen Feldoperatoren in (1. 1a, b) führen wir zunächst durch:

$$\tilde{\Psi}_{1\alpha_2\alpha_3}(x) := \Psi_{\alpha_2\alpha_3}(x) \qquad \tilde{\Psi}_{2\alpha_2\alpha_3}(x) := \Psi^{*T}_{\alpha_2\alpha_3}(x) \tag{1.7}$$

neue Bezeichnungen ein, und definieren den 8-komponentigen hermiteschen Feldoperator $\Psi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(x)$ als

$$\Psi_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(x) = U^*_{\alpha_1\beta_1}\,\delta_{\alpha_2\beta_2}\,\delta_{\alpha_3\beta_3}\,\tilde{\Psi}_{\beta_1\beta_2\beta_3}(x) \tag{1.8}$$

wobei U^* eine unitäre Transformation in einem zweidimensionalen Raum ist, dem sog. λ-Raum, der durch die Operatoren (1.7) aufgespannt wird. U^* hat die Darstellung:

$$U^*_{\alpha_1\beta_1} := \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

(Von nun an sollen Indizes, die mit "1" unterschieden werden, sich auf den λ-Raum, mit "2" versehene auf den Spinraum, und mit "3" gekennzeichnete auf den Isospinraum beziehen. Oft schreiben wir anstelle des Indextripels $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ nur α.)
Die Operatoren $\Psi_\alpha(x)$ sollen den gleichzeitigen Vertauschungsregeln

$$\left\{ \Psi_\alpha(x), \Psi_\beta(x') \right\}_{x^0 = x'^0} = \varrho_0\,\delta_{\alpha\beta}\,\delta(\vec{x} - \vec{x}') \tag{1.10}$$

genügen, wo ϱ_0 durch

$$\varrho_0 := \int \varrho(\varkappa^2)\, d\varkappa^2 \tag{1.11}$$

definiert ist, und $\varrho(\varkappa^2)$ die Massenspektraldichte in einer Lehmann-Källén-Darstellung der Zweipunktfunktion ist.
Bekanntlich ist es für die Regularisierung der Zweipunktfunktion auf dem Lichtkegel notwendig, zu fordern

$$\varrho_0 = 0 \quad , \quad \varrho_1 := \int \varkappa^2 \varrho(\varkappa^2)\, d\varkappa^2 \tag{1.12}$$

was eine indefinite Metrik im Hilbertraum der physikalischen Zustände erzwingt. Nach (1.10) verschwindet also der Antikommutator bei gleichen Zeiten, so daß wir immer annehmen können, daß die Operatoren $\Psi_\alpha(x)$ vertauschbar sind. Die Feldgleichungen (1.1a,b) gehen damit in eine einzige Gleichung über von der Form:

$$D_{\alpha\beta}\,\Psi_\beta(x) = V_{\alpha\beta\gamma\delta} : \Psi_\beta(x)\,\Psi_\gamma(x)\,\Psi_\delta(x) : \qquad (1.13)$$

Dabei ist $D_{\alpha\beta}$ wieder ein hermitescher Differentialoperator von der 1. Ordnung, und $V_{\alpha\beta\gamma\delta}$ ein fierzsymmetrischer, d.h. in allen Indizes antisymmetrischer Vertexausdruck. Um $D_{\alpha\beta}$ und $V_{\alpha\beta\gamma\delta}$ explizit angeben zu könner , führen wir die folgenden (8x8)-Matrizen ein:

$$\begin{aligned}
\sigma^{\prime\mu} &:= \left(-i\lambda_2 II\,;\, -i\lambda_2\sigma_1 I\,,\; i\,I\sigma_2 I\,,\; -i\lambda_2\sigma_3 I\right)\\
\tau^{\prime}_i &:= \left(-i\lambda_2 I\tau_1\,,\; i\,II\tau_2\,,\; -i\lambda_2 I\tau_3\right)\\
\lambda^{\prime}_i &:= \left(\lambda_1 I C_\sigma,\; -i\lambda_2 II\,,\; \lambda_3 I\,C_\tau\right)\\
\lambda^{\prime\prime}_i &:= \left(\lambda_1 C_\sigma C_\tau,\; \lambda_2 II\,,\; \lambda_3 I\,C_\tau\right)
\end{aligned} \qquad (1.14)$$

Die σ'-, τ'-, λ'-, λ''-Matrizen sind als direkte Produkte von je 3 PAULI-Matrizen zu verstehen, wobei die erste PAULI-Matrix im λ-Raum, die zweite im Spin-(σ-)Raum, und die dritte im Isospin-(τ-)Raum wirkt. Die metrischen Fundamentaltensoren c_σ, c_τ im Spin- bzw. im Isospinraum sind durch

$$C_\sigma := i\sigma_2 \qquad C_\tau := i\tau_2 \qquad (1.15)$$

gegeben.

Die σ'- und τ'-Matrizen sind in dieser Darstellung reell und antisymmetrisch, folglich antihermitesch. Die λ''-Matrizen sind hermitesch, λ''_1 und λ''_3 reell und λ''_2 imaginär, λ'_i reell und antisymmetrisch. Weiter gelten die Vertauschungsrelationen:

$$[\sigma'^{\mu}, \tau'_i] = [\lambda''_i, \sigma'_\ell] = [\lambda''_i, \tau'_j] = [\lambda'_i, \tau'_j] = 0$$

$$[\lambda''_2, \sigma'^{0}] = [\lambda'_2, \sigma'^{0}] = 0 \qquad (1.15)$$

$$\{\lambda''_{1,3}, \sigma'^{0}\} = \{\lambda'_{1,3}, \sigma'^{0}\} = 0$$

$$[\sigma'_i, \sigma'_j] = -2\,\varepsilon_{ijk}\,\sigma'_k \quad , \quad [\tau'_i, \tau'_j] = -2\,\varepsilon_{ijk}\,\tau'_k \qquad (1.16)$$

$$[\lambda'_i, \lambda'_j] = 2\,\varepsilon_{ijk}\,\lambda'_k \quad , \quad [\lambda''_i, \lambda''_j] = 2i\,\varepsilon_{ijk}\,\lambda''_k$$

Und mit $\bar{\sigma}'^{\mu}{}_{\cdot} = \sigma'_\mu$ als reziproker Basis der σ'-Algebra erhält man die Rechenregeln:

$$\sigma'^{\mu}\,\bar{\sigma}'^{\nu} + \sigma'^{\nu}\,\bar{\sigma}'^{\mu} = -2\,g^{\mu\nu}$$

$$\sigma'_\mu\,\bar{\sigma}'_\nu\,\sigma'^{\mu} = 2\,\sigma'_\nu$$

$$\bar{\sigma}'_\nu\,\sigma'_\varrho\,\bar{\sigma}'_\tau\,\sigma'^{\nu} = 4\,g_{\varrho\tau} \qquad (1.17)$$

$$\sigma'_\nu\,\bar{\sigma}'_\varrho\,\sigma'_\tau\,\bar{\sigma}'_\kappa\,\sigma'^{\nu} = 2\,\sigma'_\kappa\,\bar{\sigma}'_\tau\,\sigma'_\varrho$$

$$\lambda''_1\,\sigma'^{\nu}\,\lambda''_1 = \lambda''_1\,\sigma'^{\nu}\,\lambda''_3 = -\,\bar{\sigma}'^{\nu}$$

Die angegebenen Rechenregeln werden im Verlauf der durchgeführten Rechnungen stets benutzt werden, ohne daß jeweils besonders darauf hingewiesen wird.

Als Anwendung der so definierten Matrizen werden wir zeigen, wie der richtige nichtlineare Vertexausdruck für die hermitesche Darstellung der Theorie gefunden werden kann.

Man spannt zunächst alle reellen (8x8)-Matrizen auf einer 64-dimensionalen Basis von reellen (8x8)-Matrizen Γ_i auf, von denen man 28

antisymmetrisch und 36 symmetrisch wählen kann. Wir wählen die Basiselemente in der folgenden Weise:

$$\Gamma_a \Gamma_a := \bar{\sigma}'_\mu \sigma^\mu \qquad [4]$$

$$\Gamma_b \Gamma_b := (\lambda'_2 \vec{\tau}' \bar{\sigma}'_\mu) \cdot (\lambda'_2 \vec{\tau}' \sigma'^\mu) \qquad [12]$$

$$\Gamma_c \Gamma_c := (\lambda''_1 \vec{\tau}') \cdot (\lambda''_1 \vec{\tau}') + (\lambda''_3 \vec{\tau}') \cdot (\lambda''_3 \vec{\tau}') \qquad [6] \qquad (1.18)$$

$$\Gamma_d \Gamma_d := (\lambda''_1 \vec{\sigma}') \cdot (\lambda''_1 \vec{\sigma}') + (\lambda''_3 \vec{\sigma}') \cdot (\lambda''_3 \vec{\sigma}') \qquad [6]$$

$$\Gamma_e \Gamma_e := (\lambda'_2 \bar{\sigma}'_\mu)(\lambda'_2 \sigma'^\mu) \qquad [4]$$

$$\Gamma_f \Gamma_f := (\vec{\tau}' \bar{\sigma}'_\mu) \cdot (\vec{\tau}' \sigma'^\mu) \qquad [12] \qquad (1.19)$$

$$\Gamma_g \Gamma_g := \lambda''_1 \lambda''_1 + \lambda''_3 \lambda''_3 \qquad [2]$$

$$\Gamma_h \Gamma_h := (\lambda''_1 \vec{\tau}' \vec{\sigma}') \cdot (\lambda''_1 \vec{\tau}' \vec{\sigma}') + (\lambda''_3 \vec{\tau}' \vec{\sigma}') \cdot (\lambda''_3 \vec{\tau}' \vec{\sigma}') \qquad [18]$$

Die in (1.18) auftretenden Matrizen Γ_a , ... sind antisymmetrisch, die in (1.19) vorkommenden Γ_e , ... symmetrisch. In eckigen Klammern wurde dahinter die Anzahl der verschiedenen Γ_i angegeben. Mit Hilfe der Rechenregeln (1.15-17) kann man sich überzeugen, daß die Γ_i linear unabhängig sind. Es gilt:

$$\frac{1}{8} Sp (\Gamma_i \Gamma_j) = \delta_{ij} \qquad (1.20)$$

Und wegen der Vollständigkeit folgt bei FIERZtransformation für beliebige reelle (8x8)-Matrizen $A_{\alpha\beta}$, $B_{\gamma\delta}$:

$$A_{\alpha\beta} B_{\gamma\delta} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^{64} (A \Gamma_i B)_{\alpha\delta} (\Gamma_i)_{\gamma\beta} \qquad (1.21)$$

Wir interessieren uns nur für die Lorentz- und Isospininvarianten Vertexausdrücke. Es gibt zunächst 5 antisymmetrische Vertizes:

$$
\begin{aligned}
\bar{V}^{a} &:= \sigma'_{\mu}\,\sigma'^{\mu} \\
\bar{V}^{b} &:= (\lambda'_{2}\vec{\tau}'\sigma'_{\mu})\cdot(\lambda'_{2}\vec{\tau}'\sigma'^{\mu}) \\
\bar{V}^{c} &:= (\lambda''_{1}\vec{\tau}')(\lambda''_{1}\vec{\tau}') + (\lambda''_{3}\vec{\tau}')\cdot(\lambda''_{3}\vec{\tau}') \\
\bar{V}^{c'} &:= (\lambda''_{1}\vec{\tau}')\cdot(\lambda''_{1}\vec{\tau}') - (\lambda''_{3}\vec{\tau}')\cdot(\lambda''_{3}\vec{\tau}') \\
\bar{V}^{d'} &:= (\lambda''_{1}\vec{\sigma}')\cdot(\lambda''_{1}\vec{\sigma}') - (\lambda''_{3}\vec{\sigma}')(\lambda''_{3}\vec{\sigma}')
\end{aligned}
\tag{1.22}
$$

und 5 symmetrische Vertizes:

$$
\begin{aligned}
\bar{V}^{e} &:= (\lambda'_{2}\sigma'_{\mu})(\lambda'_{2}\sigma'^{\mu}) \\
\bar{V}^{f} &:= (\vec{\tau}'\sigma'_{\mu})(\vec{\tau}'\sigma'^{\mu}) \\
\bar{V}^{g} &:= \lambda''_{1}\lambda''_{1} + \lambda''_{3}\lambda''_{3} \\
\bar{V}^{g'} &:= \lambda''_{1}\lambda''_{1} - \lambda''_{3}\lambda''_{3} \\
\bar{V}^{h'} &:= (\lambda''_{1}\vec{\tau}'\vec{\sigma}')\cdot(\lambda''_{1}\vec{\tau}'\vec{\sigma}') - (\lambda''_{3}\vec{\tau}'\vec{\sigma}')\cdot(\lambda''_{3}\vec{\tau}'\vec{\sigma}')
\end{aligned}
\tag{1.23}
$$

Jedoch sind nur 6 von Null verschieden. Es ist nämlich:

$$
\bar{V}^{c'} = \bar{V}^{d'} = \bar{V}^{g'} = \bar{V}^{h'} = 0 \tag{1.24}
$$

Wir sind jetzt in der Lage, die FIERZtransformation der nichtverschwindenden Vertexausdrücke zu berechnen. Es ist:

$$
\begin{aligned}
\bar{V}^{F}_{\alpha\delta;\gamma\beta} &= \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{64}\left(\bar{V}_{\alpha\kappa;\lambda\delta}\,\Gamma_{i,\kappa\lambda}\right)(\Gamma_{i})_{\gamma\beta} = \bar{V}_{\alpha\beta,\gamma\delta} \\
\bar{V}_{\alpha\beta,\gamma\delta} &= \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{64}\left(\bar{V}^{F}_{\alpha\kappa;\lambda\beta}\,\Gamma_{i,\kappa\lambda}\right)(\Gamma_{i})_{\gamma\delta} = \bar{V}^{F}_{\alpha\delta;\gamma\beta}
\end{aligned}
\tag{1.25}
$$

Die FIERZtransformierte einer symmetrischen oder antisymmetrischen Vertexfunktion , in (1, 25) mit "F" bezeichnet, ist nicht notwendig wieder antisymmetrisch oder symmetrisch. Durch Einsetzen der Ausdrücke (1. 22) und (1. 23) in (1. 25) erkennt man aber, daß die Kombination

$$\bar{V}_{\alpha\beta,\gamma\delta} := \frac{1}{6}\left(3\bar{V}^{a} + \bar{V}^{b} + 2\bar{V}^{c}\right)_{\alpha\beta,\gamma\delta} \tag{1.26}$$

bei FIERZtransformation nur das Vorzeichen wechselt, und daher antisymmetrisch in allen 4 Indizes ist. Wegen der antivertauschenden Feldoperatoren ist $\bar{V}_{\alpha\beta,\gamma\delta}$ der gesuchte Vertexausdruck.
Damit können die in der Feldgleichung (1.13) vorkommenden Ausdrücke explizit angegeben werden. Man erhält:

$$D_{\alpha\beta} = i\,\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \tag{1.27}$$

$$V_{\alpha\beta\gamma\delta} = \tfrac{1}{2}\ell^{2}\,\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

mit:

$$\Gamma^{\nu}_{\alpha\beta} := -\left(\lambda_2'\sigma'^{\nu}\right)_{\alpha\beta}$$

$$\begin{aligned}\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta} := \frac{1}{6}\Big\{&3\,\sigma'^{\mu}_{\alpha\beta}\,\sigma'_{\mu,\gamma\delta} + (\lambda_2'\vec{\tau}'\sigma'^{\mu})_{\alpha\beta}\cdot(\lambda_2'\vec{\tau}'\sigma'_{\mu})_{\gamma\delta}\\ &+2\,(\lambda_1''\vec{\tau}')_{\alpha\beta}(\lambda_1''\vec{\tau}')_{\gamma\delta} + 2\,(\lambda_3''\vec{\tau}')_{\alpha\beta}(\lambda_3''\vec{\tau}')_{\gamma\delta}\Big\}\\ =: &\sum_{i} V_{i,\alpha\beta}\,V_{i,\gamma\delta}\end{aligned}$$

Die Summation über i führt dabei über alle in $\bar{V}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ enthaltenen Matrizen.
Die verschiedenen Symmetrieoperationen, gegenüber denen die Gleichung (1.13) invariant bleibt, können ebenfalls mit Hilfe der oben eingeführten Matrizen dargestellt werden. Dabei sind die $\varepsilon_{\mu\nu}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\alpha}, \alpha_0$ reelle Parameter, die mit den Transformationen der jeweiligen Gruppe zusammenhängen.

Homogene Lorentztransformation L:

$$\Psi(x) \longrightarrow e^{\left[\vec{\beta}\lambda_2'\vec{\sigma}' + \vec{\gamma}\vec{\sigma}'\right]}\;\Psi(L^{-1}x) \tag{1.28}$$

Isospintransformationen:

$$\Psi(x) \longrightarrow e^{\vec{\alpha}\cdot\vec{\tau}'}\;\Psi(x) \tag{1.29}$$

Eichtransformation:

$$\Psi(x) \longrightarrow e^{\alpha_0\lambda_2'}\;\Psi(x) \tag{1.30}$$

Diskrete Transformationen:

$$
\begin{aligned}
GP &: \quad \Psi(x^0,\vec{x}) \longrightarrow \lambda_3'' \, \Psi(x^0,-\vec{x}) \\
CP &: \quad \Psi(x^0,\vec{x}) \longrightarrow C_\tau^{-1} \lambda_3'' \, \Psi(x^0,-\vec{x}) \\
T &: \quad \Psi(x^0,\vec{x}) \longrightarrow C_\tau \lambda_3'' \, \Psi(-x^0,\vec{x}) \\
TCP &: \quad \Psi(x) \longrightarrow \Psi(-x)
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

Wegen der Antisymmetrie von $V_{\alpha\beta\gamma\delta}$ kann das verallgemeinerte WICK-Produkt in Gleichung (1.13) mittels der Zweipunktfunktion $F_{\beta\gamma}(x-x') := \langle 0 | \Psi_\beta(x) \Psi_\gamma(x') | 0 \rangle$ geschrieben werden

$$
V_{\alpha\beta\gamma\delta} : \Psi_\beta(x)\Psi_\gamma(x)\Psi_\delta(x) := V_{\alpha\beta\gamma\delta} \left[T\, \Psi_\beta(x)\Psi_\gamma(x)\Psi_\delta(x) - 3 F_{\beta\gamma}(0)\Psi_\delta(x) \right] \tag{1.32}
$$

wobei der Grenzübergang zum gleichen Raum-Zeit-Punkt in geeigneter Weise zu wählen ist. [1]
Als durch die HEISENBERG-Forderungen (1.12) regularisierte Zweipunktfunktion $F_{\alpha\beta}(x-x')$ verwenden wir:

$$
F_{\alpha\beta}(x-x') = -i \int d\varkappa^2 \rho(\varkappa^2) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\lambda_2' \bar{\sigma}_\mu' p^\mu \right)_{\alpha\beta} \frac{\varkappa^4}{(p^2)^2 (p^2 - \varkappa^2)} \, e^{-ip(x-x')} \tag{1.33}
$$

Abkürzend wird oft gesetzt:

$$
\begin{aligned}
f(p) &:= i \, \frac{\varkappa^4}{(p^2)^2 (p^2 - \varkappa^2)} \\
F^\mu(p) &:= p^\mu f(p)
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

Die zu dem Differentialoperator $D_{\alpha\beta}$ gehörige Greenfunktion $G_{\alpha\beta}(x-x')$ ist:

$$G_{\alpha\beta}(x-x') := -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\lambda_2^1 \bar{\sigma}_\mu^1 p^\mu\right)_{\alpha\beta} \frac{1}{p^2} e^{-ip(x-x')} \tag{1.35}$$

und:

$$g(p) := \frac{1}{p^2}$$

$$G^\mu(p) := p^\mu g(p) \tag{1.36}$$

Wie bei der Zweipunktfunktion sind die Pole im FEYNMANschen Sinne zu interpretieren, wobei der Integrationsweg in der komplexen p^0-Ebene von $-\infty$ nach $+\infty$ zu führen ist.
Für die unbekannte Massenspektraldichte $\varrho(\varkappa^2)$ nehmen wir in erster Näherung an, daß nur Nukleonen auftreten, so daß $\varrho(\varkappa^2)$ durch eine Deltafunktion an der Nukleonenmasse $\varkappa_N$ ersetzt werden kann, die wir nach Ausführung der Integration über $\varkappa^2$ in (1.33) wieder mit $\varkappa$ bezeichnen.

1.2. Funktionale Formulierung der nichtlinearen Spinortheorie

Die Feldgleichungen (1.1a, b) bzw. (1.13) besitzen zunächst rein symbolischen Charakter, da der Feldoperator $\Psi(x)$ hier keinem bestimmten Materiefeld mit bestimmten Quantenzahlen zugeordnet ist, sondern ein allgemeines Urfeld mit lokaler Selbstwechselwirkung beschreibt. Das Urfeld kann in stationären Zuständen existieren, die mit Elementarteilchen identifiziert werden. Im Gegensatz zu der gewöhnlichen Quantentheorie wird jedoch wegen der Äquivalenz von Energie und Masse in relativistischen Theorien ein Elementarteilchen im Prinzip aus unendlich vielen anderen Elementarsystemen virtuell zusammengesetzt sein, so daß zu seiner mathematischen Beschreibung ein unendlicher Satz von Wellenfunktionen notwendig ist, welche von einer beliebigen Anzahl von Variablen abhängen dürfen. Wir werden daher die allgemeine Feldgleichung als die verkürzte Darstellung der unendlichen Funktionensätze auffassen, die man zur kovarianten Beschreibung eines physikalischen Zustandes verwenden kann. Das zur Zeit wohl handlichste und dem physikalischen Problem angepaßte Verfahren zur Ableitung von Gleichungssystemen zur Berechnung von Eigenzuständen der allgemeinen Feldgleichung ist der Funktionalkalkül.

Viele Näherungsmethoden der Quantenfeldtheorie und auch der Theorie der Vielteilchensysteme gehen von Matrixelementen zeitgeordneter Produkte von Feldoperatoren aus, den sog. τ - Funktionen, da aus ihnen die S-Matrix berechnet werden kann. Dabei sind die τ-Funktionen

$$\tau^{(k)}_{AB}\begin{pmatrix} x_1 \dots x_k \\ \alpha_1 \dots \alpha_k \end{pmatrix} := \langle A | T\left\{ \prod_{\ell=1}^{k} \Psi_{\alpha_\ell}(x_\ell) \right\} | B \rangle \tag{1.37}$$

gemäß ihrer Definition vollständig antisymmetrisch gegenüber einer Permutation ihrer Argumente. ($|A\rangle$, $|B\rangle$ bedeuten hier physikalische Zustände zu bestimmten Quantenzahlen. T ist der WICKsche Zeitordnungsoperator.)

Sie lassen sich mit Hilfe der Funktionalableitung aus einem erzeugenden Funktional $\mathfrak{F}_{AB}(j)$ ableiten, das wir durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_{AB}(j) &:= \langle A | T(j) | B \rangle \\ &:= \langle A | T\, U(j) | B \rangle \\ &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int d^4x_1 \dots d^4x_k \prod_{\ell=1}^{k} j_{\alpha_\ell}(x_\ell)\, \tau^{(k)}_{AB}\begin{pmatrix} x_1 \dots x_k \\ \alpha_1 \dots \alpha_k \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.38}$$

definieren.

Hierbei wurde gesetzt:

$$\mathcal{U}(j) := \exp\left\{ i \int d^4x \; j_\alpha(x) \Psi_\alpha(x) \right\}$$

$$:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} \int d^4x_1 \ldots d^4x_k \left(\prod_{\ell=k}^{\wedge} j_{\alpha_\ell}(x_\ell) \right) \left(\prod_{m=1}^{k} \Psi_{\alpha_m}(x_m) \right) \qquad (1.39)$$

Das Funktional $\mathcal{T}_{AB}(j)$ und der Operator $\mathcal{U}$ hängen von reellen spinoriellen äußeren Quellen $j_\alpha(x)$ ab, für die folgende Vertauschungsregeln gelten sollen:

$$\{ j_\alpha(x), j_\beta(x') \} = \{ j_\alpha(x), \Psi_\beta(x') \} = 0 \qquad (1.40a)$$

$$\left\{ \frac{\delta}{\delta j_\alpha(x)}, j_\beta(x') \right\} = \delta_{\alpha\beta} \delta^{(4)}(x-x') \mathbb{1} \qquad (1.40b)$$

($\frac{\delta}{\delta j_\alpha(x)}$ ist hier der Operator der Funktionalableitung nach $j_\alpha(x)$).
Aus (1.40a, b) folgt, daß die Quellen j_α keine c-Zahlen sind, sondern Operatoren. Wie in Anhang I näher ausgeführt wird, sind sie die Erzeugenden einer GRASSMANN-Algebra.
Durch k-fache Anwendung der Funktionalableitung auf das Funktional ergibt sich unter Ausnutzung von (1.40b):

$$\prod_{\ell=1}^{k} \frac{\delta}{\delta j_{\alpha_\ell}(x_\ell)} T(j) = i^k \, T \prod_{\ell=1}^{k} \Psi_{\alpha_\ell}(x_\ell) \, \mathcal{U}(j) \qquad (1.41)$$

woraus für die τ-Funktionen folgt:

$$\prod_{\ell=1}^{k} \frac{\delta}{\delta j_{\alpha_\ell}(x_\ell)} \mathcal{T}_{AB}(j) \Big|_{j=0} = i^k \, \tau_{AB}^{(k)} \begin{pmatrix} x_1 \ldots x_k \\ \alpha_1 \ldots \alpha_k \end{pmatrix} \qquad (1.42)$$

Im allgemeinen ist der Differentialoperator $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ nicht mit dem Zeitordnungsoperator T oder der Funktionalableitung vertauschbar. Es würde vielmehr bei der Anwendung von $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ auf Matrixelemente von zeitgeordneten Produkten von Feldoperatoren wegen der Umordnung im T-Produkt immer der Antikommutator auftreten, wenn die Zeitkoordinate von x_1 an den Zeitkoordinaten von $x_2, x_3, \ldots$ vorbeigeführt wird. Bei nichtkanonischer Quantisierung verschwindet jedoch der Antikommutator, so daß wir schreiben können:

$$D_{\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta j_\beta(x)}T(j) = i\,T\,D_{\alpha\beta}\,\Psi_\beta(x)\,U(j) \tag{1.43}$$

Mit Hilfe von (1.37), (1.38) und (1.43) können wir jetzt die Feldgleichung (1.13) als Funktionaldifferentialgleichung für das erzeugende Funktional $\mathcal{Z}_{AB}(j)$ darstellen:

$$\left\{D_{\alpha\beta}\frac{\delta}{\delta j_\beta(x)} + V_{\alpha\beta\gamma\delta}\left[\frac{\delta^3}{\delta j_\beta(x)\,\delta j_\gamma(x)\,\delta j_\delta(x)} + 3F_{\beta\gamma}(0)\,\frac{\delta}{\delta j_\delta(x)}\right]\right\}\mathcal{Z}_{AB}(j) = 0 \tag{1.44}$$

Wenn wir anstelle von (1.13) von der entsprechenden Integralgleichung ausgegangen wären, so folgte unter Benutzung der Greenfunktion $G_{\alpha\beta}(x-x')$ die Funktionalintegralgleichung:

$$\left\{\frac{\delta}{\delta j_\alpha(x)} + \int d^4x'\,G_{\alpha\beta}(x-x')\,U_\beta\left(\frac{\delta}{\delta j(x')}\right)\right\}\mathcal{Z}_{AB}(j) = 0 \tag{1.45}$$

mit:

$$U_\alpha\left(\frac{\delta}{\delta j(x')}\right) := V_{\alpha\beta\gamma\delta}\left[\frac{\delta^3}{\delta j_\beta(x')\,\delta j_\gamma(x')\,\delta j_\delta(x')} + 3F_{\beta\gamma}(0)\,\frac{\delta}{\delta j_\delta(x')}\right] \tag{1.46}$$

Die Gleichungen (1.44) bzw. (1.45) stellen das funktionale Äquivalent der früheren Feldgleichungen dar, und wie die jüngsten Entwicklungen zu zeigen scheinen, ist man in der Lage, die Quantentheorie im Raum der Funktionale allein zu formulieren. Die Grundlage hierfür bildet ein Normbegriff für Funktionale, der eine bijektive Abbildung des physikalischen Hilbertraumes auf den Funktionalraum gestattet, unter der die Unitarität der S-Matrix gewahrt bleibt. [17]
Um die Lösungen einer Differentialgleichung eindeutig festzulegen, sind zur Integration noch Randbedingungen anzugeben. Als "Randbedingen" für (1.44) fordern wir hier, daß die τ-Funktionen translationssymmetrisch sind, was sich funktional als zusätzliche Bedingung für das Funktional $\mathcal{Z}_{AB}(j)$ wie folgt ausdrückt

$$\int d^4x\,j_\alpha(x)\frac{\partial}{\partial x^\nu}\frac{\delta}{\delta j_\alpha(x)}\mathcal{Z}_{AB}(j) = -i\left(p_\nu^{(A)} - p_\nu^{(B)}\right)\mathcal{Z}_{AB}(j)\,. \tag{1.47}$$

Oder auch:

$$\mathbb{P}\ \mathcal{Y}_{AB}(j) = -i\cdot\left(p_\nu^{(A)} - p_\nu^{(B)}\right)\mathcal{Y}_{AB}(j) \qquad (1.47')$$

Die Vierervektoren $p_\nu^{(A,B)}$ sind hier die Eigenwerte des Impulses in den Zuständen $|A\rangle$ bzw. $|B\rangle$. Wir nehmen also an, daß die physikalischen Zustände Eigenzustände des Viererimpulses sind. (Wie in der Quantenfeldtheorie üblich ist, führen wir die Observablen durch die Erzeugenden der Symmetriegruppen ein. An dieser Stelle wurde davon Gebrauch gemacht, daß die Viererimpulskomponenten die infinitesimalen Erzeugenden der 4-dimensionalen Translationsgruppe sind.)
Im Gegensatz zu den Verhältnissen beim anharmonischen Oszillator [16], können hier die Gleichungen (1.44) bzw. (1.45) mit (1.47) nicht unmittelbar kombiniert werden, weil dadurch die Lorentzkovarianz verloren gehen würde. Wie man überdies erkennt, besitzen die Gleichungen (1.44) und (1.45) Lösungen, die nicht der Bedingung (1.47) genügen, was man sofort einsieht, wenn man berücksichtigt, daß die Operatoren der beiden Gleichungen nicht mit $\mathbb{P}$ vertauschen, woraus folgt, daß Lösungen von (1.44,45) nicht auch Lösungen von (1.47) zu sein brauchen, und umgekehrt. Man ist daher darauf angewiesen, ein Verfahren zu finden, welches die physikalischen Lösungen, d.h. diejenigen, welche auch der Gleichung (1.47) genügen, aus der größeren Mannigfaltigkeit aller Lösungen herausprojiziert.
Es scheint zunächst vernünftig zu sein, anstelle der Lösungen $\mathcal{Y}_{AB}(j)$ von (1.44,45) ein bestimmtes Element der linearen Hülle der Lösungsmannigfaltigkeit auszuwählen, das wegen der Linearität der Gleichungen ebenfalls eine Lösung von (1.44,45) ist, von der wir jedoch verlangen, daß sie auch (1.47) erfüllt. Damit äquivalent ist, daß wir eine Linearkombination von Gleichungen (1.44,45) auswählen, mit der Forderung, daß der Operator der linearkombinierten Gleichung mit $\mathbb{P}$ vertauschbar ist. Praktisch bedeutet das, daß wir (1.44,45) mit einem linearen Operator im Funktionalraum symmetrisieren, der obige Bedingungen erfüllt. Im nächsten Abschnitt wird dieses Verfahren, das beim anharmonischen Oszillator bereits verwendet wurde [16], bei der Herleitung der HERMITE-Darstellung der Spinortheorie demonstriert werden.
Einen Hinweis darauf, wie man in systematischer Weise zu Gleichungssystemen für Wellenfunktionen gelangen kann, mittels deren ein physikalischer Zustand beschrieben wird, liefert bereits die Ableitung der Funktionalgleichungen (1.44,45). Wenn wir setzen:

$$F_k\left(\begin{matrix}x_1\dots x_k\\ \alpha_1\dots\alpha_k\end{matrix} j\right) := \frac{i^k}{k!}\prod_{\ell=k}^{\wedge} j_{\alpha_\ell}(x_\ell) \qquad (1.48)$$

so können wir (1.38) als Entwicklung des Funktionals $\mathcal{Y}_{AB}(j)$ nach den

"Basisfunktionalen" [18] $F_k\left(\begin{smallmatrix}x_1 \cdots x_k\\ \alpha_1 \cdots \alpha_k\end{smallmatrix}, j\right)$ deuten, wobei die τ -Funktionen als Entwicklungsfunktionen auftreten. Neben den Basisfunktionalen F_k werden in der nichtlinearen Spinortheorie die eng mit dem WICKschen Theorem zusammenhängenden DYSON-Funktionale benutzt, die folgendermaßen definiert sind:

$$D_k\left(\begin{smallmatrix}x_1 \cdots x_k\\ \alpha_1 \cdots \alpha_k\end{smallmatrix}, j\right) := \exp\left\{-\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4x'\, j_\alpha(x) F_{\alpha\beta}(x-x') j_\beta(x')\right\} F_k\left(\begin{smallmatrix}x_1 \cdots x_k\\ \alpha_1 \cdots \alpha_k\end{smallmatrix}, j\right) \tag{1.49}$$

Die entsprechenden Entwicklungsfunktionale werden als φ-Funktionen bezeichnet:

$$\Psi_{AB}(j) = \sum_{k=0}^{\infty} \int d^4x_1 \cdots d^4x_k\, \varphi_{AB}^{(k)}\left(\begin{smallmatrix}x_1 \cdots x_k\\ \alpha_1 \cdots \alpha_k\end{smallmatrix}\right) D_k\left(\begin{smallmatrix}x_1 \cdots x_k\\ \alpha_1 \cdots \alpha_k\end{smallmatrix}, j\right) \tag{1.50}$$

(In der sonst üblichen Weise erhält man die φ -Funktionen aus den τ -Funktionen wenn man nach dem WICKschen Theorem sämtliche Zweierkontraktionen herauszieht.)
Allgemein gilt für geeignete Basisfunktionale $B_k\left(\begin{smallmatrix}x_1 \cdots x_k\\ \alpha_1 \cdots \alpha_k\end{smallmatrix}, j\right)$:

$$\Psi_{AB}(j) = \sum_{k=0}^{\infty} \int d^4x_1 \cdots d^4x_k\, \beta_{AB}^{(k)}\left(\begin{smallmatrix}x_1 \cdots x_k\\ \alpha_1 \cdots \alpha_k\end{smallmatrix}\right) B_k\left(\begin{smallmatrix}x_1 \cdots x_k\\ \alpha_1 \cdots \alpha_k\end{smallmatrix}, j\right) \tag{1.51}$$

Die bezüglich der im Anhang I definierten Funktionalintegration reziproken Basisfunktionale $B^k\left(\begin{smallmatrix}x_1 \cdots x_k\\ \alpha_1 \cdots \alpha_k\end{smallmatrix}, j\right)$ führen wir durch die Orthogonalitätsrelation ein:

$$\int \Pi dj\, B^k\left(\begin{smallmatrix}x_1 \cdots x_k\\ \alpha_1 \cdots \alpha_k\end{smallmatrix}, j\right) B_\ell\left(\begin{smallmatrix}y_1 \cdots y_\ell\\ \beta_1 \cdots \beta_\ell\end{smallmatrix}, j\right) = \delta_\ell^k \frac{1}{k!} \sum_{\substack{\lambda_1 \cdots \lambda_k \\ P \in \mathfrak{S}_k}} (-)^P \prod_{\tau=1}^{k} \delta_{\alpha_\tau \beta_{\lambda_\tau}} \delta(x_\tau - y_{\lambda_\tau}) \tag{1.52}$$

Und für eine Funktionalgleichung der Form:

$$\mathcal{D}_\alpha\left(j, \frac{\delta}{\delta j}\right) \Psi_{AB}(j) = 0 \tag{1.53}$$

mit:

$$\mathcal{D}_\alpha\left(j, \frac{\delta}{\delta j}\right) := \frac{\delta}{\delta j_\alpha(x)} + \int d^4x'\, G_{\alpha\beta}(x-x') U_\beta\left(\frac{\delta}{\delta j_\beta(x')}\right) \tag{1.54}$$

ergibt sich, wenn man bildet:

$$\int \Pi dj\, B^k\left(\begin{smallmatrix}x_1 \cdots x_k\\ \alpha_1 \cdots \alpha_k\end{smallmatrix}, j\right) \mathcal{D}_\alpha\left(j, \frac{\delta}{\delta j}\right) \Psi_{AB}(j) = 0 \tag{1.55}$$

ein Gleichungssystem für die Funktionen $\beta_{AB}^{(k)}$.

Im allgemeinen sind die reziproken Basisfunktionale nicht bekannt. Es existiert jedoch ein ausgezeichnetes System von Basisfunktionalen $\mathfrak{J}_K\left(\begin{smallmatrix}x_1 \dots x_K\\ \alpha_1 \dots \alpha_K\end{smallmatrix}; j\right)$, die sog. HERMITE-Funktionale, die orthogonal sind, d.h. bei denen die reziproken Basisfunktionale mit den ursprünglichen zusammenfallen:

$$\int \mathcal{D}j\; \mathfrak{J}_k\left(\begin{smallmatrix}x_1 \dots x_K\\ \alpha_1 \dots \alpha_K\end{smallmatrix}; j\right) \mathfrak{J}_e\left(\begin{smallmatrix}y_1 \dots y_e\\ \beta_1 \dots \beta_e\end{smallmatrix}; j\right) = \delta_{ek}\, \frac{(-)^{\frac{k(k+1)}{2}}}{k!}\, \det\left(A_{\alpha_i \beta_j}(x_i - y_j)\right) \times \mathbb{N}_0(A) \tag{1.56}$$

$$\mathbb{N}_0(A) := \int \mathcal{D}j\; \mathfrak{J}_0(j)\, \mathfrak{J}_0(j)$$

(Die $\mathfrak{J}_K\left(\begin{smallmatrix}x_1 \dots x_K\\ \alpha_1 \dots \alpha_K\end{smallmatrix}; j\right)$ sind in Anhang I explizit angegeben. $A_{\alpha_i \beta_j}(x_i - y_j)$ ist hier eine reelle antisymmetrische Funktion.)

Die aus (1.45) folgenden Gleichungssysteme (wir beschränken uns fortan auf die Funktionalintegralgleichung), bestehen aus unendlich vielen gekoppelten linearen Integralgleichungen für die Funktionen $\beta_{AB}^{(k)}$, wobei aus physikalischen Gründen nur Funktionen mit gleicher Parität, d.h. entweder mit gerader oder mit ungerader Anzahl von Variablen verknüpft sind, was man unmittelbar durch Iteration der allgemeinen Feldgleichung auf Grund der speziellen Gestalt des nichtlinearen Wechselwirkungsterms einsieht.

Um das Gleichungssystem zu lösen, ist man auf Näherungsmethoden angewiesen, wobei die Störungstheorie aus dem Kreis der in Betracht kommenden Methoden ausscheidet, da man bei starken Wechselwirkungen keine Größe hat, die klein ist gegenüber den anderen, so daß ein störungstheoretischer Ansatz nicht möglich ist.

Im Prinzip enthält jeder Zustand in seiner repräsentierenden Wellenfunktion Anteile von Funktionen mit beliebig hoher Variablenzahl. Anschaulich wird man jedoch annehmen, daß der Beitrag einer Wellenfunktion zu einem bestimmten physikalischen Zustand desto kleiner wird, je höher ihre Variablenzahl ist, oder auch, daß es sehr unwahrscheinlich ist, daß ein Elementarteilchen, z.B. ein Nukleon, aus einer großen Anzahl von anderen Teilchen zusammengesetzt ist. Man kann also zunächst approximativ alle Wellenfunktionen mit einer Variablenzahl $> N$ gleich Null setzen. Damit wird das Gleichungssystem endlich, und man erhält für das angenäherte Funktional $\mathfrak{J}_{AB}^{N}(j)$ die Form:

$$\mathfrak{J}_{AB}^{N}(j) = \sum_{k=0}^{N} \int d^4x_1 \dots d^4x_K\; \beta_{AB}^{(k,N)}\left(\begin{smallmatrix}x_1 \dots x_K\\ \alpha_1 \dots \alpha_K\end{smallmatrix}\right) \mathfrak{B}_k\left(\begin{smallmatrix}x_1 \dots x_K\\ \alpha_1 \dots \alpha_K\end{smallmatrix}; j\right) \tag{1.57}$$

Um die Berechtigung dieser Näherung nachzuweisen, ist natürlich erforderlich zu beweisen, daß nicht nur die Eigenwerte des angenäherten endlichen Systems für $N \longrightarrow \infty$ gegen die exakten Eigenwerte des unendlichen Systems konvergieren, sondern auch, was damit noch nicht automatisch ebenfalls erfüllt ist, daß die approximativen Wellenfunktionen ebenfalls gegen die exakten Wellenfunktionen konvergieren.

Dieses Problem wurde bisher am vereinfachten Modell des anharmonischen Oszillators behandelt, jedoch noch nicht in voller Allgemeinheit gelöst. Der Beweis wurde bislang nur für einen Spezialfall, den sog. "einzeitigen" Fall, geführt. [19]
Jedoch lassen weitergehende Untersuchungen [3] vermuten, daß man bei der Entwicklung nach HERMITE-Funktionalen auf ein besseres Konvergenzverhalten auch in der Spinortheorie hoffen darf, obwohl in der Spinortheorie der allgemeine Beweis, ob dieses Näherungsverfahren zu einem konvergenten mathematischen Prozeß führt, ebenfalls noch aussteht. Zumindest sind die numerischen Ergebnisse beim anharmonischen Oszillator in der HERMITE-Darstellung wenigstens in den niedrigsten Näherungen schlechter als die mit der DYSON-Darstellung erzielten, wenn man die exakten Werte der SCHRÖDINGER-Theorie zum Vergleich heranzieht [7]. Trotzdem ist es im Hinblick auf zukünftige Entwicklungen aufschlußreich, die sich bei der Darstellung mit HERMITE-Funktionalen ergebenden Gleichungssysteme zu bestimmen und näher zu untersuchen.

1.3. Unsymmetrisierte und symmetrisierte HERMITE-Darstellung

Nach dem im letzten Abschnitt beschriebenen allgemeinen Verfahren werden wir nun die Gleichungen der Spinortheorie in der Darstellung mittels HERMITE-Funktionalen herleiten, und zwar zunächst in der unsymmetrisierten Form, die der Zusatzbedingung (1.47) nicht genügt, und später in der symmetrisierten Form, die diese Bedingung erfüllt.
Wir entwickeln das physikalische Funktional $\mathcal{Z}_{AB}(j)$ nach den in Anhang I definierten HERMITE-Funktionalen:

$$\mathcal{Z}_{AB}(j) = \sum_{k=0}^{\infty} \int d^4x_1 \dots d^4x_k \; \psi_{AB}^{(k)}\left(\begin{matrix} x_1 \dots x_k \\ \alpha_1 \dots \alpha_k \end{matrix}\right) \mathcal{J}_k\left(\begin{matrix} x_1 \dots x_k \\ \alpha_1 \dots \alpha_k \end{matrix}, j\right) \tag{1.58}$$

wobei wir für die dort noch unbestimmt gelassene Matrix $A_{\alpha\beta}(x-x')$ setzen:

$$A_{\alpha\beta}(x-x') = -2 F_{\alpha\beta}(x-x') \tag{1.59}$$

Der Sinn für diese Wahl wird klar, wenn man sich vor Augen führt, daß die funktionale Gestalt der WICK-Regel ist:

$$\mathcal{Z}_{AB}(j) = \exp\left\{\tfrac{1}{2}\int d^4x\, d^4x'\, j_\alpha(x) F_{\alpha\beta}(x-x') j_\beta(x')\right\} \Phi_{AB}(j) \tag{1.60}$$

$\Phi_{AB}(j)$ ist das erzeugende Funktional der Funktionen $\varphi_{AB}^{(k)}$, die in (1.50) eingeführt wurden. Die φ-Funktionen können nach den üblichen Regeln der Feldtheorie aus den τ-Funktionen explizit berechnet werden, wenn die Zweipunktfunktion bekannt ist. Die Bedeutung der φ-Funktionen ergibt sich, wenn man annimmt, daß die wichtigsten Singularitäten der τ-Funktionen in der Nähe des Lichtkegels in den Zweipunktfunktionen enthalten sind, welche durch die WICK-Regel als Kontraktionen herausgezogen werden. Man sollte daher vermuten, daß die φ-Funktionen auf dem Lichtkegel weniger singulär als die τ-Funktionen sind.
Die χ-Funktionen, die sich bei der Entwicklung von $\mathcal{Z}_{AB}(j)$ nach HERMITE-Funktionalen ergeben, entstehen nun anschaulich aus der Entwicklung nach DYSON-Funktionalen als die sich ergebenden neuen Koeffizientenfunktionen, wenn man die DYSON-Funktionale einem Orthogonalisierungsprozeß bezüglich der Funktionalintegration unterwirft.
Wir schreiben die Integralgleichung (1.45) in der Form:

$$\mathcal{O}_\alpha\left(j, \frac{\delta}{\delta j}\right) \mathcal{Z}_{AB}(j) = 0 \tag{1.61}$$

wo $\mathcal{O}_\alpha(j, \frac{\delta}{\delta j})$ der Operator auf der linken Seite von (1.45) ist. Wenn wir die Entwicklung (1.58) benutzen, und ferner die Rekursionsformeln für die HERMITE-Funktionale und deren Orthogonalitätsrelation verwenden, so folgt aus

$$\int \Pi dj \; \mathcal{J}_n \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{smallmatrix}, j\right) \mathcal{O}_\alpha\left(j, \frac{\delta}{\delta j}\right) \mathcal{Y}_{AB}(j) = 0 \tag{1.62}$$

das untenstehende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2} \chi_{n+2}\left(\begin{smallmatrix} x\, x_1 \dots x_n \\ \alpha\, \alpha_1 \dots \alpha_n \end{smallmatrix}\right) = \\
&= \sum_{\lambda=1}^{n} (-)^\lambda F_{\alpha_\lambda \alpha}(x_\lambda - x)\, \chi_{n-1}\left(\begin{smallmatrix} 1 & x_1 \dots x_n \\ \lambda & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{smallmatrix}\right) \\
&+ V_{\alpha\beta\gamma\delta} \int d^4\bar{x}\, G_{\alpha\bar{\alpha}}(x-\bar{x}) \Big\{ 6 \sum_{1 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \le n} (-)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} F_{\alpha_{\lambda_1}\beta}(x_{\lambda_1}-\bar{x}) F_{\alpha_{\lambda_2}\gamma}(x_{\lambda_2}-\bar{x}) F_{\alpha_{\lambda_3}\delta}(x_{\lambda_3}-\bar{x})\, \chi_{n-3}\left(\begin{smallmatrix} 1 & x_1 \dots x_n \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{smallmatrix}\right) \\
&\quad + 3 \sum_{1 \le \lambda_1 < \lambda_2 \le n} (-)^{\lambda_1+\lambda_2} F_{\alpha_{\lambda_1}\beta}(x_{\lambda_1}-\bar{x}) F_{\alpha_{\lambda_2}\gamma}(x_{\lambda_2}-\bar{x})\, \chi_{n-1}\left(\begin{smallmatrix} \bar{x} & 1 & x_1 \dots x_n \\ \delta & \lambda_1\lambda_2 & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{smallmatrix}\right) \\
&\quad + \tfrac{3}{4} \sum_{\lambda=1}^{n} (-)^\lambda F_{\alpha_\lambda\beta}(x_\lambda - \bar{x})\, \chi_{n+1}\left(\begin{smallmatrix} \bar{x}\,\bar{x} & 1 & x_1 \dots x_n \\ \gamma\,\delta & \lambda & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{smallmatrix}\right) \\
&\quad + \tfrac{1}{8}\, \chi_{n+3}\left(\begin{smallmatrix} \bar{x}\,\bar{x}\,\bar{x} & x_1 \dots x_n \\ \beta\,\gamma\,\delta & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{smallmatrix}\right) \Big\}
\end{aligned} \tag{1.63}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \infty$$

Dabei wurde gesetzt:

$$\chi_n\left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{smallmatrix}\right) := (-2)^n \int d^4y_1 \dots d^4y_n\, F_{\alpha_1\beta_1}(x_1-y_1) \dots F_{\alpha_n\beta_n}(x_n-y_n)\, \psi^{(n)}\left(\begin{smallmatrix} y_1 \dots y_n \\ \beta_1 \dots \beta_n \end{smallmatrix}\right) \tag{1.64}$$

Ferner bedeutet hier z.B. $\left(\begin{smallmatrix} 1 & x_1 \dots x_n \\ \lambda & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{smallmatrix}\right) := \left(\begin{smallmatrix} x_1 \dots x_{\lambda-1} x_{\lambda+1} \dots x_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_{\lambda-1} \alpha_{\lambda+1} \dots \alpha_n \end{smallmatrix}\right)$, daß die λ-te Koordinate einfach weggelassen wird.

Die Abhängigkeit von den Zuständen $|A\rangle$, $|B\rangle$ werden wir im folgenden zwar stets voraussetzen, jedoch nicht mehr explizit anführen.

Im Impulsraum erhält man aus (1.63) durch 4-dimensionale Fouriertransformation:

$$\frac{1}{2}\,\tilde{\chi}_{n+1}\left(\begin{matrix} q & q_1 \dots q_n \\ \alpha & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{matrix}\right) =$$

$$= (2\pi)^4 \sum_{\lambda=1}^{n} (-)^{\lambda}\, \delta^{(4)}(q+q_\lambda)\, \tilde{F}_{\alpha_\lambda \alpha}(q_\lambda)\, \tilde{\chi}_{n-1}\left(\begin{matrix} \frac{1}{\lambda} & q_1 \dots q_n \\ \alpha_\lambda & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{matrix}\right)$$

$$+ V_{\alpha\beta\gamma\delta}\, \tilde{G}_{\alpha\tilde{\alpha}}(q) \Bigg\{ 6(2\pi)^4 \sum_{1 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \le n} (-)^{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\, \delta^{(4)}\Big(q + \sum_{k=1}^{3} q_{\lambda_k}\Big)\, \tilde{F}_{\alpha_{\lambda_1}\beta}(q_{\lambda_1})\, \tilde{F}_{\alpha_{\lambda_2}\gamma}(q_{\lambda_2})\, \tilde{F}_{\alpha_{\lambda_3}\delta}(q_{\lambda_3})\, \tilde{\chi}_{n-3}\left(\begin{matrix} \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} & q_1 \dots q_n \\ \tilde{\alpha} & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{matrix}\right)$$

$$+ 3 \sum_{1 \le \lambda_1 < \lambda_2 \le n} (-)^{\lambda_1+\lambda_2}\, \tilde{F}_{\alpha_{\lambda_1}\beta}(q_{\lambda_1})\, \tilde{F}_{\alpha_{\lambda_2}\gamma}(q_{\lambda_2})\, \tilde{\chi}_{n-1}\left(\begin{matrix} q_{\lambda_1}+q_{\lambda_2}+q & \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} & q_1 \dots q_n \\ \delta & & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{matrix}\right) \qquad (1.65)$$

$$+ \frac{3}{4} \sum_{\lambda=1}^{n} (-)^{\lambda}\, \tilde{F}_{\alpha_\lambda \beta}(q_\lambda) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \tilde{\chi}_{n+1}\left(\begin{matrix} q+q_\lambda-p & p & \frac{1}{\lambda} & q_1 \dots q_n \\ \gamma & \delta & & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{matrix}\right)$$

$$+ \frac{1}{8} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4}\, \tilde{\chi}_{n+3}\left(\begin{matrix} q-p-p' & p & p' & q_1 \dots q_n \\ \beta & \gamma & \delta & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{matrix}\right) \Bigg\}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots \infty$$

Die Fouriertransformierte einer Funktion wurde dabei mit einer Tilde gekennzeichnet, die im folgenden weggelassen wird, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind.

Die niedrigsten Näherungen für die Gleichungssysteme (1.63, 65), die schon ein nichttriviales Ergebnis liefern, ergeben sowohl bei Fermionen als auch bei Bosonen das gleiche Ergebnis, wie die früher am φ-Gleichungssystem durchgeführten Rechnungen [1, 2]. Dafür sei auf Anhang II verwiesen.

Bei näherer Betrachtung des Systems (1.63) erkennt man sofort, daß die Variable $\overset{x}{\alpha}$ gegenüber den $\overset{x_i}{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ dadurch ausgezeichnet ist, daß bei Vertauschung von $\overset{x}{\alpha}$ mit einem der $\overset{x_i}{\alpha_i}$ die Gleichungen nicht in sich übergehen, während sie bezüglich der Variablen $\overset{x_i}{\alpha_i}$ antisymmetrisiert sind. Man kann deshalb auch kaum erwarten, daß die Lösungen von (1.63) ein definiertes Symmetrieverhalten bei einer beliebigen Permutation aller Argumente zeigen, wie es durch das Pauliprinzip gefordert wird. (1.63) ist daher noch zu symmetrisieren. Zu diesem Zweck benutzen wir anstelle der Gleichung (1.45) eine durch Linearkombination ("Ausschmierung") über $\overset{x}{\alpha}$ mittels eines geeignet zu wählenden Symmetrisierungsoperators $\mathfrak{S}_{\alpha(x)}$ zu gewinnende, symmetrisierte Gleichung.

Daß dieses Verfahren statthaft ist, d.h. daß Lösungen der neuen Gleichung immer noch Lösungen der ursprünglichen Gleichung sind, folgt aus der Forminvarianz von (1.45) gegenüber einer Translation

$$x \to x + y \tag{1.66}$$

um einen beliebigen Vierervektor y.
An den Operator $\mathbb{S}_\alpha(x)$ sind die Forderungen zu stellen, daß bei Anwendung auf $\mathcal{O}_\alpha(j, \frac{\delta}{\delta j})$ der resultierende Operator

$$\mathcal{O}(j, \frac{\delta}{\delta j}) := \int d^4x \, \mathbb{S}_\alpha(x) \, \mathcal{O}_\alpha(j, \frac{\delta}{\delta j}) \tag{1.67}$$

mit $\mathbb{P}$ vertauscht, so daß die Lösungen der symmetrisierten Gleichung translationssymmetrisch sind. Ferner verlangen wir, daß die neuen χ-Gleichungen integrabel sein sollen. Insbesondere sollen durch das Symmetrisierungsverfahren keine $\delta(0)$-artigen Singularitäten in den Gleichungen auftreten.
Unter allen diesen Bedingungen scheint der einfachste Operator, der sie erfüllt, die Gestalt:

$$\mathbb{S}_\alpha(x) := j_\alpha(x) + \int d^4x' \, F^{-1}_{\alpha\beta}(x-x') \frac{\delta}{\delta j_\beta(x')} \tag{1.68}$$

zu besitzen.
Auf die Frage, ob $F^{-1}_{\alpha\beta}(x-x')$ für jede mögliche Zweipunktfunktion existiert, gehen wir hier nicht weiter ein. Jedenfalls ist durch (1.67) und (1.68) eine formale Vorschrift gegeben, wie die symmetrisierten χ-Gleichungen zu erhalten sind, und in dem resultierenden Gleichungssystem tritt $F^{-1}_{\alpha\beta}(x-x')$ nicht mehr auf.
Wie oben gewinnt man aus der Beziehung:

$$\int \Pi dj \; \mathcal{J}_m \begin{pmatrix} x_1 \dots x_m \\ \alpha_1 \dots \alpha_m \end{pmatrix} j) \; \mathcal{O}(j, \frac{\delta}{\delta j}) \; \mathcal{J}_{\lambda B}(j) = 0 \tag{1.69}$$

das folgende symmetrisierte Gleichungssystem:

$$n\,\chi_n\begin{pmatrix} x_1 \dots x_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix} =$$

$$= 4 \sum_{1 \le \lambda_1 < \lambda_2 \le n} (-)^{\lambda_1+\lambda_2} F_{\alpha_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_2}}(x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2})\, \chi_{n-2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} & x_1 \dots x_n \\ & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix} \tag{1.70}$$

$$+ V_{\alpha\beta\gamma\delta} \int d^4x \left\{ 2 \sum_{\substack{1 \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4}}^{n} (-)^{\sigma_{\lambda_1 \dots \lambda_4}} G_{\alpha_{\lambda_1}\alpha}(x_{\lambda_1} - x) F_{\alpha_{\lambda_2}\beta}(x_{\lambda_2} - x) F_{\alpha_{\lambda_3}\gamma}(x_{\lambda_3} - x) F_{\alpha_{\lambda_4}\delta}(x_{\lambda_4} - x)\, \chi_{n-4}\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 \dots \lambda_4} & x_1 \dots x_n \\ & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix} \right.$$

$$+ 3(-)^n \sum_{\substack{1 \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3}}^{n} (-)^{\sigma_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}} G_{\alpha_{\lambda_1}\alpha}(x_{\lambda_1} - x) F_{\alpha_{\lambda_2}\beta}(x_{\lambda_2} - x) F_{\alpha_{\lambda_3}\gamma}(x_{\lambda_3} - x)\, \chi_{n-2}\begin{pmatrix} x & \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} & x_1 \dots x_n \\ \delta & & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$- \frac{3}{2} \sum_{\substack{1 \\ \lambda_1 \neq \lambda_2}}^{n} (-)^{\sigma_{\lambda_1\lambda_2}} G_{\alpha_{\lambda_1}\alpha}(x_{\lambda_1} - x) F_{\alpha_{\lambda_2}\beta}(x_{\lambda_2} - x)\, \chi_n\begin{pmatrix} x & x & \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} & x_1 \dots x_n \\ \gamma & \delta & & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\left. + \frac{1}{4}(-)^{n+1} \sum_{\lambda=1}^{n} (-)^{\sigma_\lambda} G_{\alpha_\lambda\alpha}(x_\lambda - x)\, \chi_{n+2}\begin{pmatrix} x & x & x & x & \frac{1}{\lambda} & x_1 \dots x_n \\ \beta & \gamma & \delta & & & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix} \right\}$$

$$n = 1, 2, \dots\dots \infty$$

$(-)^{\sigma_{\lambda_1 \dots \lambda_k}}$ bedeutet hier das Vorzeichen jener Permutation $P \in \mathfrak{S}_n$ für die gilt:

$$P(1, \dots, \lambda_1 - 1, \lambda_1 + 1, \dots, \lambda_k - 1, \lambda_k + 1, \dots, n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = (1, 2, \dots, n)$$

Im Impulsraum folgt aus (1.70):

$$n\,\tilde{\chi}_n\begin{pmatrix} q_1 \dots q_n \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix} =$$

$$= 4(2\pi)^4 \sum_{1 \le \lambda_1 < \lambda_2 \le n} (-)^{\lambda_1+\lambda_2} \delta^{(4)}(q_{\lambda_1} + q_{\lambda_2})\, \tilde{F}_{\alpha_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_2}}(q_{\lambda_1})\, \tilde{\chi}_{n-2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} & q_1 \dots q_n \\ & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix} \tag{1.71}$$

$$+ V_{\alpha\beta\gamma\delta} \left\{ 2(2\pi)^4 \sum_{\substack{1 \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4}}^{n} (-)^{\sigma_{\lambda_1 \dots \lambda_4}} \delta^{(4)}\Big(\sum_{i=1}^{4} q_{\lambda_i}\Big) \tilde{G}_{\alpha_{\lambda_1}\alpha}(q_{\lambda_1}) \tilde{F}_{\alpha_{\lambda_2}\beta}(q_{\lambda_2}) \tilde{F}_{\alpha_{\lambda_3}\gamma}(q_{\lambda_3}) \tilde{F}_{\alpha_{\lambda_4}\delta}(q_{\lambda_4})\, \chi_{n-4}\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 \dots \lambda_4} & q_1 \dots q_n \\ & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix} \right.$$

$$+ 3(-)^n \sum_{\substack{1 \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3}}^{n} (-)^{\sigma_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}} \tilde{G}_{\alpha_{\lambda_1}\alpha}(q_{\lambda_1}) \tilde{F}_{\alpha_{\lambda_2}\beta}(q_{\lambda_2}) \tilde{F}_{\alpha_{\lambda_3}\gamma}(q_{\lambda_3})\, \tilde{\chi}_{n-2}\begin{pmatrix} q_{\lambda_1}+q_{\lambda_2}+q_{\lambda_3} & \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} & q_1 & q_n \\ \delta & & \alpha_1 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$- \frac{3}{2} \sum_{\substack{1 \\ \lambda_1 \neq \lambda_2}}^{n} (-)^{\sigma_{\lambda_1\lambda_2}} \tilde{G}_{\alpha_{\lambda_1}\alpha}(q_{\lambda_1}) \tilde{F}_{\alpha_{\lambda_2}\beta}(q_{\lambda_2}) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\, \tilde{\chi}_n\begin{pmatrix} q_{\lambda_1}+q_{\lambda_2}-p & p & \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} & q_1 \dots q_n \\ \gamma & \delta & & \alpha_1 \dots \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\left. + \frac{1}{4}(-)^{n+1} \sum_{\lambda=1}^{n} (-)^{\sigma_\lambda} \tilde{G}_{\alpha_\lambda\alpha}(q_\lambda) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4p'}{(2\pi)^4}\, \tilde{\chi}_{n+2}\begin{pmatrix} q_\lambda - p - p' & p & p' & \frac{1}{\lambda} & q_1 \dots q_n \\ \beta & \gamma & \delta & & \alpha_1 & \alpha_n \end{pmatrix} \right\}$$

$$n = 1, 2, \dots\dots \infty$$

2. Relativistische Mehrteilchengleichungen

In früheren Arbeiten der nichtlinearen Spinortheorie der Elementarteilchen sind die Massen der einfachsten (Spin-1/2)-Baryonen sowohl in der niedrigsten nichttrivialen Näherung berechnet worden, die darin besteht, die 5-Punktfunktionen φ_5 und alle höheren Beiträge zu vernachlässigen, und von der 3-Punktfunktion nur die φ_1-Anteile mitzunehmen, als auch in einer Näherung, die mit der NTD-Näherung dadurch in Beziehung steht, daß nicht nur, wie bei jener, die 5-Punktfunktion φ_5 und alle höheren Funktionen unterdrückt werden, sondern auch alle φ_3-Funktionen mit ungleichen Argumenten, so daß nur $\varphi_3(^{x\,x\,x}_{\alpha\,\beta\,\gamma})$ beibehalten wird, wodurch das Problem wieder algebraisch und damit im Prinzip einfach lösbar wird. Wenn auch Anteile vom Typ $\varphi_3(^{x\,x\,y}_{\alpha\,\beta\,\gamma})$ berücksichtigt werden, so führt das auf ein System linearer Integralgleichungen für die 1-Punktfunktion $\varphi_1(^{x}_{\alpha})$ und die 3-Punktfunktion $\varphi_3(^{x\,x\,y}_{\alpha\,\beta\,\gamma})$. Dieses System, das naturgemäß viel reichhaltiger ist als die früheren, relativ primitiven Näherungen, wurde von Dürr und Wagner in [20], was seine gruppentheoretische und analytische Struktur anlangt, behandelt. Für das analoge Bosonensystem existiert bislang keine analoge Untersuchung.

Für Bosonen ergibt schon die niedrigste NTD-Näherung, die alle φ_4- bzw. χ_4-Funktionen vernachlässigt, eine nichttriviale, algebraische Gleichung für die kontrahierten 2-Punktfunktionen, wobei die Fermionen, aus denen das Boson besteht, nur im S-Zustand (Bahndrehimpuls 0 im Schwerpunktsystem des Bosons) sind. Höhere Drehimpulszustände, z.B. Vektormesonen wie $\omega, \varrho, \varphi, K^*$, die zu einem erheblichen Teil aus D-Zuständen des Fermion-Antifermion-Systems aufgebaut sein können, werden dadurch nicht beschrieben. Die niedrigsten Gleichungen, aus denen die Massen solcher Zustände berechnet werden können, sind schon echte Integralgleichungen, die nicht auf ein algebraisches Problem zurückführbar sind.

Wenn wir von der 4-Punktfunktion χ_4 noch die χ_2-Anteile berücksichtigen, und in die χ_2-Gleichung einsetzen, so erhält man eine Integralgleichung für die 2-Punktfunktion allein, die wir, parallel zu dem vollen (χ_1, χ_3)-System in 2. Ordnung der NTD-Näherung weiter untersuchen wollen. Dabei beschränken wir uns auf einen gewöhnlichen Vakuumzustand.

Die Bereicherung unserer Gleichungssysteme bringt eine wesentliche Komplizierung in analytischer und algebraischer Hinsicht mit sich, wie schon einleitend bemerkt wurde. Die analytische Komplikation rührt von der Tatsache her, daß nun Integralgleichungen zu lösen sind, anstelle von algebraischen Gleichungen. Dabei wird in den meisten Fällen vorausgesetzt, daß die Integralkerne hinreichend regulär sind, um die Fredholmsche Konstruktion der Resolvente zu gestatten.

Die algebraische Komplizierung des Problems wird von der notwendigen gruppentheoretischen Ausreduktion der Wellenfunktionen und Kerne

verursacht. Auf den ersten Blick scheint der Versuch, die nichtausreduzierten Gleichungen mittels der FREDHOLM-Methode zu lösen, einen Vorteil gegenüber der Absicht zu besitzen, die ausreduzierten Gleichungen zu behandeln, da ja dadurch die ziemlich mühselige Arbeit der gruppentheoretischen Ausreduktion vermieden wird. Andererseits bedeutet natürlich eine FREDHOLM-Näherung der nichtausreduzierten Gleichungen eine rohe Näherung, denn wie DÜRR und WAGNER an einem Modell mit YUKAWA-Wechselwirkung zeigen konnten, kommt die FREDHOLM-Approximation einer ungewichteten Mittelung über alle Bahndrehimpulse l gleich. Da die Kerne der Eigenwertgleichungen hier jedoch exponentiell mit l abfallen, wird dadurch der S-Zustand mit l=0 stark bevorzugt. Beabsichtigt man daher eine sorgfältige Behandlung der Gleichungssysteme, so läßt sich eine Drehimpulsausreduktion der Gleichungen nicht umgehen.

2.1. Das Baryonengleichungssystem

In der nichtsymmetrisierten Version der Theorie erhält man in der niedrigsten nichttrivialen NTD-Näherung, wo alle Wellenfunktionen mit mehr als 3 Variablen identisch Null gesetzt werden, ein System zur Bestimmung der Massen der Fermionenzustände. Dieses System besteht in der DYSON-Darstellung aus einer Gleichung für $\varphi_1(\overset{x}{\alpha})$, die mit 3 Gleichungen für $\varphi_3(\overset{x}{\alpha}\overset{y}{\beta}|\overset{z}{\gamma})$ gekoppelt sind, welche man durch Iteration der 3 Argumente der 3-Punktfunktion mittels der Feldgleichung erhält. Wellenfunktionen dieser Gestalt gehören nach Kontraktion zu einem Fermionzustand, der aus "Baryon-Meson"-Resonanzen aufgebaut wird, da die Funktion $\varphi_3(\overset{x}{\alpha}\overset{y}{\beta}|\overset{z}{\gamma})$ zu einem Matrixelement der Gestalt

$$\varphi_3(\overset{x}{\alpha}\overset{y}{\beta}|\overset{z}{\gamma}) = \langle 0|:\psi_\alpha(x)\,\psi_\beta(y)\,\psi^*_\gamma(z):|F\rangle$$

gehört. Üblicherweise wählt man dabei jene Gleichung für $\varphi_3(\overset{x}{\alpha}\overset{y}{\beta}|\overset{y}{\delta})$ aus, wo auf der rechten Seite nur die bezüglich der zweiten und dritten Koordinate kontrahierte Form auftritt. Die beiden anderen Gleichungen für $\varphi_3(\overset{x}{\alpha}\overset{y}{\beta}|\overset{y}{\gamma})$ werden nicht betrachtet. Diese Auswahl scheint, obwohl damit begründbar, daß die experimentellen Ergebnisse darauf hindeuten, daß sie berechtigt ist, dennoch willkürlich in dem Sinne zu sein, als sie nicht unmittelbar aus der Theorie folgt.
Im Gegensatz dazu erhält man mit unserer symmetrisierten Formulierung der Theorie aus den Gleichungssystemen (1.70) bzw. (1.71) Baryonengleichungen, die ohne zusätzliche Annahmen dem obigen Gleichungstyp entsprechen.

Für n=1 und n=3 folgt aus (1.70) unter Vernachlässigung der 5-Punktfunktionen χ_5 das System:

$$\chi_1\left(\begin{smallmatrix}\bar{x}\\ \alpha\end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{8}\ell^2 \int d^4x \left[G(\bar{x}-x)V_i\right]_{\alpha\beta}\left[V_i\right]_{\gamma\delta}\ \chi_3\left(\begin{smallmatrix}x & x & x\\ \beta & \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}\chi_3\left(\begin{smallmatrix}\bar{x} & \bar{x} & y\\ \sigma & \alpha & \tau\end{smallmatrix}\right) = -\tfrac{1}{2}V_{\alpha\beta\gamma\delta}\int d^4x \Big\{ &\left[G_{\sigma\alpha}(\bar{x}-x)F_{\alpha\beta}(\bar{x}-x) - G_{\alpha\alpha}(\bar{x}-x)F_{\sigma\beta}(\bar{x}-x)\right]\chi_3\left(\begin{smallmatrix}x & x & y\\ \gamma & \delta & \tau\end{smallmatrix}\right)\\ &+\left[G_{\alpha\alpha}(\bar{x}-x)F_{\tau\beta}(y-x) - G_{\tau\alpha}(y-x)F_{\alpha\beta}(\bar{x}-x)\right]\chi_3\left(\begin{smallmatrix}x & x & \bar{x}\\ \gamma & \delta & \sigma\end{smallmatrix}\right)\\ &+\left[G_{\tau\alpha}(y-x)F_{\sigma\beta}(\bar{x}-x) - G_{\sigma\alpha}(\bar{x}-x)F_{\tau\beta}(y-x)\right]\chi_3\left(\begin{smallmatrix}x & x & \bar{x}\\ \gamma & \delta & \alpha\end{smallmatrix}\right)\Big\}\end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}&-2V_{\alpha\beta\gamma\delta}\int d^4x \Big\{ G_{\sigma\alpha}(\bar{x}-x)F_{\alpha\beta}(\bar{x}-x)F_{\tau\gamma}(y-x)\\ &\quad + G_{\alpha\alpha}(\bar{x}-x)F_{\tau\beta}(y-x)F_{\sigma\gamma}(\bar{x}-x)\\ &\quad + G_{\tau\alpha}(y-x)F_{\sigma\beta}(\bar{x}-x)F_{\alpha\gamma}(\bar{x}-x)\Big\}\chi_1\left(\begin{smallmatrix}x\\ \delta\end{smallmatrix}\right)\\ &+\tfrac{4}{3}\Big\{F_{\sigma\tau}(\bar{x}-y)\chi_1\left(\begin{smallmatrix}\bar{x}\\ \alpha\end{smallmatrix}\right) - F_{\alpha\tau}(\bar{x}-y)\chi_1\left(\begin{smallmatrix}\bar{x}\\ \sigma\end{smallmatrix}\right)\Big\}\end{aligned}$$

Und im Impulsraum:

$$\chi_1\left(\begin{smallmatrix}y\\ \alpha\end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{8}\ell^2\left[G(y)V_i\right]_{\alpha\beta}\left[V_i\right]_{\gamma\delta}\int\frac{d^4q\ d^4q'}{(2\pi)^8}\chi_3\left(\begin{smallmatrix}y-q-q' & q & q'\\ \beta & \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_3\left(\begin{smallmatrix}p & y-p\\ \sigma\alpha & \tau\end{smallmatrix}\right) = -\tfrac{1}{2}V_{\alpha\beta\gamma\delta}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\Big\{ &\left[G_{\sigma\alpha}(p-q)F_{\alpha\beta}(q) + G_{\alpha\beta}(q)F_{\sigma\alpha}(p-q)\right]\hat{\chi}_3\left(\begin{smallmatrix}p\\ \gamma\delta\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}y-p\\ \tau\end{smallmatrix}\right)\\ &+\left[G_{\alpha\alpha}(q+p-y)F_{\tau\beta}(y-p) - G_{\tau\alpha}(y-p)F_{\alpha\beta}(q+p-y)\right]\hat{\chi}_3\left(\begin{smallmatrix}q\\ \gamma\delta\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}y-q\\ \sigma\end{smallmatrix}\right)\\ &+\left[G_{\tau\alpha}(y-p)F_{\sigma\beta}(q+p-y) - G_{\sigma\alpha}(q+p-y)F_{\tau\beta}(y-p)\right]\hat{\chi}_3\left(\begin{smallmatrix}q\\ \gamma\delta\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}y-q\\ \alpha\end{smallmatrix}\right)\Big\}\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}&-2V_{\alpha\beta\gamma\delta}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\Big\{\left[G_{\sigma\alpha}(p-q)F_{\alpha\beta}(q)\right]F_{\tau\gamma}(y-p)\\ &\quad+\left[F_{\sigma\alpha}(p-q)G_{\alpha\beta}(q)\right]F_{\tau\gamma}(y-p)\\ &\quad+\left[F_{\sigma\alpha}(p-q)F_{\alpha\beta}(q)\right]G_{\tau\gamma}(y-p)\Big\}\chi_1\left(\begin{smallmatrix}y\\ \delta\end{smallmatrix}\right)\\ &-\tfrac{4}{3}\Big\{F_{\sigma\tau}(y-p)\chi_1\left(\begin{smallmatrix}y\\ \alpha\end{smallmatrix}\right) - F_{\alpha\tau}(y-p)\chi_1\left(\begin{smallmatrix}y\\ \sigma\end{smallmatrix}\right)\Big\}\end{aligned}$$

$\mathfrak{I}$ bedeutet hier den Schwerpunktsimpuls des Baryons. Ferner wurde die Kontraktion $\hat{\chi}_3$ im Impulsraum durch

$$\hat{\chi}_3 \left(\begin{matrix} p \\ \sigma \varkappa \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \mathfrak{I}-p \\ \tau \end{matrix} \right) := \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \chi_3 \left(\begin{matrix} p-q & q & \mathfrak{I}-p \\ \sigma & \varkappa & \tau \end{matrix} \right) \tag{2.5}$$

definiert.
Da wir die Darstellung der nichtlinearen Spinortheorie mit hermiteschen Feldoperatoren benutzt haben, sind die χ-Funktionen als Matrixelemente geordneter Produkte von Feldoperatoren unphysikalische Überlagerungen von Teilchen-Antiteilchen-Zuständen. Um Gleichungen für Zustände mit bestimmter Baryonenzahl zu erhalten, sind die Gleichungen (2.3) und (2.4) bezüglich der Baryoneneichgruppe auszureduzieren. Das gleiche gilt auch für den Isospin und den Spin, die in der nichtlinearen Spinortheorie ebenfalls als gute Quantenzahlen betrachtet werden.

2.1.1. Ausreduktion bezüglich der Baryoneneichgruppe

Wie schon erwähnt wurde, kann die Symmetrie der Feldgleichung gegenüber der Transformation (1.30)

$$\Psi_{(x)} \longrightarrow e^{\alpha_0 \lambda_2'} \Psi_{(x)}$$

zur Darstellung der Baryonenzahl in λ-Raum benutzt werden, da nach dem NOETHERschen Theorem jede Symmetrie einem Erhaltungssatz, speziell hier der Erhaltung der Baryonenzahl entspricht.
Wegen der Gestalt der Matrix λ_2' ist (1.30) im Spin- und Isospinraum proportional zur Identität. Wir betrachten deshalb in diesem Abschnitt (1.30) nur als Transformation im λ-Raum.
Die entsprechende infinitesimale Transformation läßt sich schreiben

$$\Psi_{(x)} \longrightarrow [\mathbb{1} + i\varepsilon \hat{B}] \Psi_{(x)} \tag{2.6}$$

wobei wir den hermiteschen Operator $\hat{B}$ eingeführt haben, dessen Matrixdarstellung im λ-Raum durch

$$\hat{B}_{\alpha\beta} = -\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

gegeben ist. Nach den Sätzen der Darstellungstheorie von Gruppen spannen

die Eigenzustände von $\hat{B}$ den Darstellungsraum auf, und wenn wir den Operator $\hat{B}$ mit den Operator der Baryonenzahl B identifizieren, so erhält man für die niedrigsten Eigenzustände im λ-Raum die Darstellung:

$$\underline{B=1:} \quad \lambda^{(F)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} \quad , \quad \underline{B=-1:} \quad \lambda^{(A)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Wie man sofort nachprüft, erfüllen die Zustände $\lambda^{(F,A)}$ die Eigenwertgleichung:

$$\hat{B}\,\lambda^{(F,A)} = \pm\,\lambda^{(F,A)} \tag{2.9}$$

Dabei soll "F" auf einen Fermionzustand, "A" auf einen Antifermionzustand hinweisen.
Wenn wir auf $\hat{B}$ die unitäre Transformation U^* anwenden, so folgt als Darstellung:

$$U\,\hat{B}\,U^* = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \tag{2.10}$$

Und wenn wir damit die endliche Transformation nach (1.30) bestimmen, erhalten wir

$$U\,e^{\alpha_0 \lambda_2^1}\,U^* = \begin{pmatrix}e^{i\alpha_0} & 0\\0 & e^{-i\alpha_0}\end{pmatrix} \tag{2.11}$$

d.h. die zweidimensionale Darstellung der Transformation zerfällt in zwei eindimensionale irreduzible Darstellungen, wie es für abelsche Gruppen auch sein muß. Man erkennt überdies, daß die Transformation (1.30) isomorph ist zu den Drehungen um eine feste Achse (3-Achse), die eine abelsche Untergruppe der dreidimensionalen Drehungen bilden. Bezüglich den Darstellungen der dreidimensionalen Drehgruppe sind aber die Darstellungen einer abelschen Untergruppe reduzibel.
Für die Zustände $\lambda^{(F,A)}$ erhält man in dieser Darstellung

$$U^*\,\lambda^{(F)} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad U^*\,\lambda^{(A)} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \tag{2.12}$$

mit denen man die Zustände zu den Baryonenzahlen 1 oder -1 darstellen kann.

Die Zustände (2.8) erfüllen die Orthogonalitätsrelation:

$$\lambda_\alpha^{(B)} \lambda_\alpha^{(B')*} = \delta_{BB'} \quad , \quad B, B' = F, A \quad , \quad \delta_{BB'} := \begin{cases} 0 & B \neq B' \\ 1 & B = B' \end{cases} \tag{2.13}$$

Um Zustände mit höheren Baryonenzahlen zu gewinnen, hat man direkte Produkte aus den Zuständen (2.8) zu bilden.
Im Falle von 3 Fermionen mit den Baryonenzahlen $B = \pm 1$ sind für das Gesamtsystem nur die Baryonenzahlen $B = \pm 1, \pm 3$ möglich.
Für $B = \pm 3$ bekommt man nur jeweils einen Basisvektor, und zwar:

$$\underline{B = 3}: \quad \Lambda_{\alpha\beta\gamma}^{(FFF)} := \lambda_\alpha^{(F)} \otimes \lambda_\beta^{(F)} \otimes \lambda_\gamma^{(F)} \quad , \quad \underline{B = -3}: \quad \Lambda_{\alpha\beta\gamma}^{(AAA)} := \lambda_\alpha^{(A)} \otimes \lambda_\beta^{(A)} \otimes \lambda_\gamma^{(A)} \tag{2.14}$$

Für die Baryonenzahlen $B = \pm 1$ tragen jedoch drei paarweise orthogonale Basisvektoren bei. Das sind in unmittelbar verständlicher Schreibweise die Vektoren:

$$\begin{aligned} &\underline{B = 1}: \quad \Lambda_{\alpha\beta\gamma}^{(FFA)} \quad , \quad \Lambda_{\alpha\beta\gamma}^{(FAF)} \quad , \quad \Lambda_{\alpha\beta\gamma}^{(AFF)} \\ &\underline{B = -1}: \quad \Lambda_{\alpha\beta\gamma}^{(AAF)} \quad , \quad \Lambda_{\alpha\beta\gamma}^{(AFA)} \quad , \quad \Lambda_{\alpha\beta\gamma}^{(FAA)} \end{aligned} \tag{2.15}$$

Die Zustände (2.14, 15) spannen die Darstellungsräume für die Produktdarstellungen der Baryoneneichgruppe auf. Wir können daher wegen der Symmetrie der Feldgleichung die χ-Funktionen als Matrixelemente von Feldoperatoren nach den obigen Vektoren entwickeln, und erhalten für die χ-Funktionen der Gleichungen (2.3,4) die Darstellungen:

$$\chi_1 \left({}^{J}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} \right) =: \lambda_{\alpha_1}^{(F)} \chi^{(F)} \left({}^{J}_{\alpha_2 \alpha_3} \right) + \lambda_{\alpha_1}^{(A)} \chi^{(A)} \left({}^{J}_{\alpha_2 \alpha_3} \right) \tag{2.16}$$

$$\chi_3 \left({}^{P}_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 ; \beta_1 \beta_2 \beta_3} \middle| {}^{J-P}_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3} \right) =: \sum_K \Lambda_{\alpha_1 \beta_1 \gamma_1}^{(K)} \chi^{(K)} \left({}^{P}_{\alpha_2 \alpha_3 ; \beta_2 \beta_3} \middle| {}^{J-P}_{\gamma_2 \gamma_3} \right) \tag{2.17}$$

Die Summation über K in (2.17) ist über alle Basisvektoren (2.14, 15) zu den möglichen Konfigurationen K auszuführen.

Die Partialamplituden $\chi^{(F,A)}$ bzw. $\chi^{(K)}$ gehören jetzt zu Zuständen mit bestimmter Baryonenzahl, die jedoch noch bezüglich der Konfigurationen K entartet sind.
Da auch die Zustände $\Lambda^{(FFF)}_{\alpha\beta\gamma}, \ldots\ldots$ wegen (2.13) orthonormiert sind in dem Sinne, daß gilt

$$\Lambda^{(K)}_{\alpha\beta\gamma}\,\Lambda^{(K')*}_{\alpha\beta\gamma} = \delta_{KK'} = \begin{cases} 0 & K \neq K' \\ 1 & K = K' \end{cases} \tag{2.18}$$

so können wir leicht Gleichungen für die Partialamplituden gewinnen, wenn wir die Entwicklungen (2.16) und (2.17) in (2.3) und (2.4) einsetzen, und unter Ausnutzung der Orthogonalitätsrelationen (2.13) und (2.18) mit bestimmten Baryonenzuständen auf beiden Seiten heranmultiplizieren. Nach einiger Rechnung folgen dann untenstehende Gleichungen:

$$\chi^{(F)}\left(\begin{smallmatrix} J \\ \sigma_2\sigma_3 \end{smallmatrix}\right) = \tag{2.19}$$

$$= \frac{\ell^2}{24} G^{\mu}(J)\,(\bar{\sigma}_\mu I)_{\sigma_2\sigma_3,\alpha_2\alpha_3} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Big\{ 4\, C_{\sigma,\beta_2\gamma_2} C_{\sigma,\delta_2\alpha_2} \left[C_\tau I^1 C_\tau\right]_{\beta_3\gamma_3,\delta_3\alpha_3} \chi^{(FFA)}\left(\begin{smallmatrix} p & J-p \\ \beta_2\beta_3,\gamma_2\gamma_3 & \delta_2\delta_3 \end{smallmatrix}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{3}\,\sigma^{\nu}_{\beta_2\gamma_2}\,\sigma_{\nu,\delta_2\alpha_2}\left[3I^0 + I^1\right]_{\beta_3\gamma_3,\delta_3\alpha_3} \left[\chi^{(FAF)}\left(\begin{smallmatrix} p & J-p \\ \beta_2\beta_3,\delta_2\gamma_3 & \delta_3\delta_3 \end{smallmatrix}\right) - \chi^{(AFF)}\left(\begin{smallmatrix} p & J-p \\ \gamma_2\gamma_3,\beta_2\beta_3 & \delta_2\delta_3 \end{smallmatrix}\right)\right] \Big\}$$

$$\chi^{(FFF)}\left(\begin{smallmatrix} p & J-p \\ \sigma_2\sigma_3,\kappa_2\kappa_3 & \tau_2\tau_3 \end{smallmatrix}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\varkappa\ell}{8\pi}\right)^2 \sum_{i=1}^{2} q_i \left(\frac{p^2}{\varkappa^2}\right) P_i^{1\mu\nu}(p)\,(\bar{\sigma}_\mu C_\sigma \bar{\sigma}_\nu^T)_{\sigma_2\kappa_2} C_{\sigma,\gamma_2\delta_2} \left[C_\tau I^1 C_\tau\right]_{\tau_3\kappa_3,\gamma_3\delta_3} \chi^{(FFF)}\left(\begin{smallmatrix} p & J-p \\ \gamma_2\gamma_3,\delta_2\delta_3 & \tau_2\tau_3 \end{smallmatrix}\right)$$

$$+ \frac{\ell^2}{3} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \left[G^{\mu}(q+p-J)\,F^{\nu}(J-p) + G^{\nu}(J-p)\,F^{\mu}(q+p-J)\right] \times \tag{2.20}$$

$$\times \Big\{ (\bar{\sigma}_\mu C_\sigma \bar{\sigma}_\nu^T)_{\kappa_2\tau_2} C_{\sigma,\gamma_2\delta_2} \left[C_\tau I^1 C_\tau\right]_{\kappa_3\tau_3,\gamma_3\delta_3} \chi^{(FFF)}\left(\begin{smallmatrix} q & J-q \\ \gamma_2\gamma_3,\delta_2\delta_3 & \sigma_2\sigma_3 \end{smallmatrix}\right)$$

$$+ (\bar{\sigma}_\nu C_\sigma \bar{\sigma}_\mu^T)_{\tau_2\sigma_2} C_{\sigma,\gamma_2\delta_2} \left[C_\tau I^1 C_\tau\right]_{\tau_3\sigma_3,\gamma_3\delta_3} \chi^{(FFF)}\left(\begin{smallmatrix} q & J-q \\ \gamma_2\gamma_3,\delta_2\delta_3 & \kappa_2\kappa_3 \end{smallmatrix}\right) \Big\}$$

$$\chi^{(FFA)}\left(\begin{matrix}\sigma_2\sigma_3, & p\\ x_2x_3 & \end{matrix}\middle|\begin{matrix} J-p\\ \tau_2\tau_3\end{matrix}\right) =$$

(2.21)

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{\varkappa\ell}{8\pi}\right)^2 \sum_{i=1}^{2} q_i\left(\frac{p^2}{\varkappa^2}\right) P_i^{1\mu\nu}(p)\left(\bar\sigma_\mu C_\sigma \bar\sigma_\nu^T\right)_{\sigma_2\varkappa_2} C_{\sigma_3\gamma_2\delta_2}\left[C_\tau I^1 C_\tau\right]_{\varepsilon_3\varkappa_3,\gamma_3\delta_3} \chi^{(FFA)}\left(\begin{matrix}p\\ \gamma_2\gamma_3,\delta_2\delta_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}J-p\\ \tau_2\tau_3\end{matrix}\right)$$

$$+ \frac{\ell^2}{2}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\left[G^\mu(q+p-J)F^\nu(J-p) + G^\nu(J-p)F^\mu(q+p-J)\right]\times$$

$$\times\left\{\left(\bar\sigma_\nu^T\sigma^\varepsilon\bar\sigma_\mu^T\right)_{\tau_2\sigma_2} C_{\varepsilon,\gamma_2\delta_2}\left[3I^0+I^1\right]_{\tau_3\sigma_3,\gamma_3\delta_3}\left[\chi^{(FAF)}\left(\begin{matrix}q\\ \gamma_2\gamma_3,\delta_2\delta_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}J-q\\ \varkappa_2\varkappa_3\end{matrix}\right) - \chi^{(AFF)}\left(\begin{matrix}q\\ \delta_2\delta_3,\gamma_2\gamma_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}J-q\\ \varkappa_2\varkappa_3\end{matrix}\right)\right]\right.$$

$$\left. - \left(\bar\sigma_\mu\sigma^\varepsilon\sigma_\nu\right)_{\varkappa_2\tau_2} C_{\varepsilon,\gamma_2\delta_2}\left[3I^0+I^1\right]_{\varkappa_3\tau_3,\gamma_3\delta_3}\left[\chi^{(FAF)}\left(\begin{matrix}q\\ \delta_2\delta_3,\gamma_2\gamma_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}J-q\\ \sigma_2\sigma_3\end{matrix}\right) - \chi^{(AFF)}\left(\begin{matrix}q\\ \gamma_2\gamma_3,\delta_2\delta_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}J-q\\ \sigma_2\sigma_3\end{matrix}\right)\right]\right\}$$

$$\chi^{(FAF)}\left(\begin{matrix}\sigma_2\sigma_3, & p\\ \varkappa_2\varkappa_3 & \end{matrix}\middle|\begin{matrix} J-p\\ \tau_2\tau_3\end{matrix}\right) =$$

(2.22)

$$= -\frac{1}{6}\left(\frac{\varkappa\ell}{8\pi}\right)^2 \sum_{i=1}^{2} q_i\left(\frac{p^2}{\varkappa^2}\right) P_i^{1\mu\nu}(p)\left(\bar\sigma_\mu\sigma^\varepsilon\bar\sigma_\nu\right)_{\sigma_2\varkappa_2}\sigma_{\varepsilon,\gamma_2\delta_2}\left[3I^0+I^1\right]_{\varepsilon_3\varkappa_3,\delta_3\delta_3}\left[\chi^{(FAF)}\left(\begin{matrix}p\\ \delta_2\delta_3,\gamma_2\gamma_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}J-p\\ \tau_2\tau_3\end{matrix}\right) - \chi^{(AFF)}\left(\begin{matrix}p\\ \gamma_2\gamma_3,\delta_2\delta_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}J-p\\ \tau_2\tau_3\end{matrix}\right)\right]$$

$$+ \frac{\ell^2}{12}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\left[G^\mu(q+p-J)F^\nu(J-p) + G^\nu(J-p)F^\mu(q+p-J)\right]\times$$

$$\times\left\{\left(\bar\sigma_\mu^T\sigma^\varepsilon\bar\sigma_\nu^T\right)_{\varkappa_2\tau_2}\sigma_{\varepsilon,\gamma_2\delta_2}\left[3I^0+I^1\right]_{\varkappa_3\tau_3,\gamma_3\delta_3}\left[\chi^{(FAF)}\left(\begin{matrix}q\\ \gamma_2\gamma_3,\delta_2\delta_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}J-q\\ \sigma_2\sigma_3\end{matrix}\right) - \chi^{(AFF)}\left(\begin{matrix}q\\ \delta_2\delta_3,\gamma_2\gamma_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}J-q\\ \sigma_2\sigma_3\end{matrix}\right)\right]\right.$$

$$\left. + 4\left(\bar\sigma_\nu C_\sigma\bar\sigma_\mu^T\right)_{\tau_2\sigma_2} C_{\sigma,\gamma_2\delta_2}\left[C_\tau I^1 C_\tau\right]_{\tau_3\sigma_3,\gamma_3\delta_3}\chi^{(FFA)}\left(\begin{matrix}q\\ \gamma_2\gamma_3,\delta_2\delta_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}J-q\\ \varkappa_2\varkappa_3\end{matrix}\right)\right\}$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{\varkappa\ell}{8\pi}\right)^2 \sum_{i=1}^{2}\left[2q_i\left(\frac{p^2}{\varkappa^2}\right)F^\lambda(J-p) + b_i\left(\frac{p^2}{\varkappa^2}\right)G^\lambda(J-p)\right] P_i^{1\mu\nu}(p)\left(\bar\sigma_\mu\sigma^\varepsilon\bar\sigma_\nu\right)_{\sigma_2\varkappa_2}\left(\bar\sigma_\lambda\sigma_\varepsilon\right)_{\tau_2\delta_2}\left[3I^0+I^1\right]_{\sigma_3\varkappa_3,\tau_3\delta_3}\chi^{(F)}\left(\begin{matrix}J\\ \delta_2\delta_3\end{matrix}\right)$$

$$+ \frac{4}{3}F^\mu(J-p)\left(\bar\sigma_\mu\right)_{\tau_2\varkappa_2}\delta_{\tau_3\varkappa_3}\chi^{(F)}\left(\begin{matrix}J\\ \sigma_2\sigma_3\end{matrix}\right)$$

$$\chi^{(AFF)}\left(\begin{matrix}p\\ \sigma_2\sigma_3,\varkappa_2\varkappa_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\mathfrak{I}-p\\ \tau_2\tau_3\end{matrix}\right) =$$

(2.23)

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{\varkappa\ell}{8\pi}\right)^2 \sum_{i=1}^{2} q_i \left(\frac{p^2}{\varkappa^2}\right) P_i^{(1)\mu\nu}(p)\left(\bar\sigma_\mu^T \sigma^\varepsilon \bar\sigma_\nu^T\right)_{\sigma_2\varkappa_2} \sigma_{\varepsilon,\gamma_2\delta_2}\left[3I^0+I^1\right]_{\sigma_3\varkappa_3,\gamma_3\delta_3}\left[\chi^{(FAF)}\left(\begin{matrix}p\\ \gamma_2\gamma_3,\delta_2\delta_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\mathfrak{I}-p\\ \tau_2\tau_3\end{matrix}\right) - \chi^{(AFF)}\left(\begin{matrix}p\\ \delta_2\delta_3,\gamma_2\gamma_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\mathfrak{I}-p\\ \tau_2\tau_3\end{matrix}\right)\right]$$

$$+ \frac{\ell^2}{12}\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}\left[G^\mu(q+p-\mathfrak{I})F^\nu(\mathfrak{I}-p) + G^\nu(\mathfrak{I}-p)F^\mu(q+p-\mathfrak{I})\right] \times$$

$$\times \left\{-\left(\bar\sigma_\nu \sigma^\ell \bar\sigma_\mu\right)_{\tau_2\sigma_2}\sigma_{\ell,\gamma_2\delta_2}\left[3I^0+I^1\right]_{\tau_3\sigma_3,\gamma_3\delta_3}\left[\chi^{(FAF)}\left(\begin{matrix}q\\ \delta_2\delta_3,\gamma_2\gamma_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\mathfrak{I}-q\\ \varkappa_2\varkappa_3\end{matrix}\right) - \chi^{(AFF)}\left(\begin{matrix}q\\ \gamma_2\gamma_3,\delta_2\delta_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\mathfrak{I}-q\\ \varkappa_2\varkappa_3\end{matrix}\right)\right]\right.$$

$$\left. + 4\left(\bar\sigma_\mu C_\varepsilon \bar\sigma_\nu^T\right)_{\varkappa_2\tau_2} C_{\varepsilon,\gamma_2\delta_2}\left[C_\tau I^1 C_\tau\right]_{\varkappa_3\tau_3,\gamma_3\delta_3}\chi^{(FFA)}\left(\begin{matrix}q\\ \gamma_2\gamma_3,\delta_2\delta_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\mathfrak{I}-q\\ \sigma_2\sigma_3\end{matrix}\right)\right\}$$

$$- \frac{1}{3}\left(\frac{\varkappa\ell}{8\pi}\right)^2 \sum_{i=1}^{2}\left[2q_i\left(\frac{p^2}{\varkappa^2}\right)F^\lambda(\mathfrak{I}-p) + b_i\left(\frac{p^2}{\varkappa^2}\right)G^\lambda(\mathfrak{I}-p)\right] P_i^{(1)\mu\nu}(p)\left(\bar\sigma_\mu^T \sigma^\varepsilon \bar\sigma_\nu^T\right)_{\sigma_2\varkappa_2}\left(\bar\sigma_\lambda \sigma_\varepsilon^T\right)_{\tau_2\delta_2}\left[3I^0+I^1\right]_{\sigma_3\varkappa_3,\delta_3\tau_3}\chi^{(F)}\left(\begin{matrix}\mathfrak{I}\\ \delta_2\delta_3\end{matrix}\right.$$

$$- \frac{4}{3}F^\mu(\mathfrak{I}-p)\left(\bar\sigma_\mu\right)_{\tau_2\sigma_2}\delta_{\tau_3\sigma_3}\chi^{(F)}\left(\begin{matrix}\mathfrak{I}\\ \varkappa_2\varkappa_3\end{matrix}\right)$$

Für die Teilchen-Antiteilchen-konjugierten Partialamplituden ergeben sich die entsprechenden konjugierten Gleichungen. Aus den Gleichungen (2.22, 23) folgt, daß bei Vertauschung der beiden Fermionen, die das "Bosonen"-Untersystem des Baryonenzustandes aufbauen, gilt:

$$\chi^{(AFF)}\left(\begin{matrix}p\\ \sigma_2\sigma_3,\varkappa_2\varkappa_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\mathfrak{I}-p\\ \tau_2\tau_3\end{matrix}\right) = -\chi^{(FAF)}\left(\begin{matrix}p\\ \varkappa_2\varkappa_3,\sigma_2\varkappa_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\mathfrak{I}-p\\ \tau_2\tau_3\end{matrix}\right) \qquad (2.24)$$

Man überzeugt sich davon leicht, daß bei Vertauschung von σ und $\varkappa$ in einer der beiden Gleichungen sie in die andere übergeht. Da ferner die Baryonenfunktion $\Lambda^{(FFA)}_{\alpha\beta\gamma}$ gegenüber der Vertauschung von α und β symmetrisch ist, muß auch:

$$\chi^{(FFA)}\left(\begin{matrix}p\\ \sigma_2\sigma_3,\varkappa_2\varkappa_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\mathfrak{I}-p\\ \tau_2\tau_3\end{matrix}\right) = -\chi^{(FFA)}\left(\begin{matrix}p\\ \varkappa_2\varkappa_3,\sigma_2\sigma_3\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\mathfrak{I}-p\\ \tau_2\tau_3\end{matrix}\right) \qquad (2.25)$$

erfüllt sein.

Wir werden daher im folgenden auf die Angabe der Gleichungen für $\chi^{(AFF)}$ verzichten. Zur Kontrolle der umfangreichen Rechnungen ist es jedoch nützlich, neben $\chi^{(FAF)}$ auch $\chi^{(AFF)}$ zu berechnen, um danach das Bestehen der entsprechenden Symmetriebeziehungen nachzuprüfen.
In obigen Gleichungen haben wir einige Abkürzungen eingeführt. Und zwar sind:

$$I^{0}_{\alpha\beta,\gamma\delta} = \tfrac{1}{2}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} \qquad \text{bzw.} \qquad I^{\wedge}_{\alpha\beta,\gamma\delta} := \tfrac{1}{2}\vec{\tau}_{\alpha\beta}\cdot\vec{\tau}_{\gamma\delta} \tag{2.26}$$

die Projektionsoperatoren auf Zustände mit dem Isospin 0 bzw. 1. Die invarianten Funktionen $q_i\left(\frac{p^2}{\kappa^2}\right)$ und $b_i\left(\frac{p^2}{\kappa^2}\right)$ ergeben sich bei Ausführung der Integration aus den Beziehungen:

$$\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4} F^{\mu}(p-q)\,G^{\nu}(q) =: \left(\frac{\kappa}{8\pi}\right)^2 \sum_i q_i\left(\frac{p^2}{\kappa^2}\right) P_i^{1\mu\nu}(p) \tag{2.27}$$

$$\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4} F^{\mu}(p-q)\,F^{\nu}(q) =: \left(\frac{\kappa}{8\pi}\right)^2 \sum_i b_i\left(\frac{p^2}{\kappa^2}\right) P_i^{1\mu\nu}(p) \tag{2.28}$$

Dabei sind die Operatoren $P_i^{1\mu\nu}(p)$ durch

$$P_0^{1\mu\nu}(p) := \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu} - \frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\,, \qquad P_1^{1\mu\nu}(p) := \tfrac{1}{2}g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \tag{2.29}$$

definiert. Sie stehen mit den Spin-Projektionsoperatoren $P_i^{\mu\nu}(p)$, welche durch

$$P_i^{\mu\nu}(p) := a_i\,g^{\mu\nu} + b_i\frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \tag{2.30}$$

mit: $a_i := \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ $\qquad b_i := \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$ für Spin $\begin{cases} i=0 \\ i=1 \end{cases}$

gegeben sind, in folgender Beziehung:

$$\sum_i q_i\left(\frac{p^2}{\kappa^2}\right) P_i^{\mu\nu}(p) = \frac{1}{16}\,\mathrm{Sp}\left(\sigma^\mu\bar{\sigma}_\rho\,\sigma^\nu\bar{\sigma}_\sigma\right)\sum_i q_i\left(\frac{p^2}{\kappa^2}\right) P_i^{1\rho\sigma}(p)\,, \tag{2.31}$$

Oft schreiben wir die $P_i^{1\mu\nu}(p)$ ebenfalls in der Form (2.30):

$$P_i^{1\mu\nu}(p) = a_i^1 g^{\mu\nu} + b_i^1 \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \tag{2.32}$$

wo: $a_i^1 := \begin{cases} 1/2 \\ 1/2 \end{cases}$ $b_i^1 := \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$ für $i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

Die explizite Form der Funktionen $q_i\left(\frac{p^2}{\kappa^2}\right)$ und $b_i\left(\frac{p^2}{\kappa^2}\right)$ ist in Anhang III angegeben.

2.1.2. Ausreduktion nach der Isospingruppe

Da die Isospingruppe zu den dreidimensionalen Drehungen isomorph ist, kann die Isospinalgebra völlig analog zur Drehimpulsalgebra behandelt werden.
Die Isospinabhängigkeit der 1-Punktfunktion $\chi^{(F)}\left(\begin{smallmatrix} y \\ s_2 s_3 \end{smallmatrix}\right)$ ist trivial. Da sie den Isospin 1/2 trägt, dessen Projektion auf die 3-Achse im Isospinraum die Werte $\pm$ 1/2 annehmen kann, führen wir orthonormale Isospin-Wellenfunktionen $T_{s_3}^{1/2\, I_3}$ ein, für die gilt:

$$T_{s_3}^{1/2\, I_3} T_{s_3}^{1/2\, I_3'\,*} = \delta_{I_3 I_3'} \tag{2.33}$$

(I_3 ist die Projektion des Isospins.) Wenn wir vereinbaren, daß der Spinorindex $s_3=1$ der "magnetischen" Quantenzahl $I_3=1/2$ entsprechen soll, und analog $s_3=2$ dem Wert $-1/2$, so kann man die Zustände (2.33) schreiben:

$$T_{s_3}^{1/2\, I_3} = \delta_{I_3 s_3} \tag{2.34}$$

Und für die 1-Punktfunktion erhalten wir:

$$\chi^{(F)}\left(\begin{smallmatrix} y \\ s_2 s_3 \end{smallmatrix}\right) = \sum_{I_3} \chi_{1/2}^{(F)}\left(\begin{smallmatrix} y \\ s_2 \end{smallmatrix}\right) T_{s_3}^{1/2\, I_3} \tag{2.35}$$

Den Isospin-Anteil der 3-Punktfunktionen kann man ebenfalls einfach gewinnen. Wir beschränken uns bei der Herleitung auf den Fall B=3. Die anderen Fälle lassen sich unter Beachtung des etwas anderen Transformationsverhaltens der hermitesch konjugierten Feldoperatoren gegenüber Drehungen im Isospinraum völlig analog behandeln.
Zunächst setzen wir den Isospin der beiden Fermionen zusammen, die das "Boson" aufbauen. Da beide den Isospin 1/2 tragen, kann der Gesamtisospin t des Untersystems nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Anschließend verkoppeln wir den Isospin 1/2 des dritten Fermions mit t zum Gesamtisospin des Baryons, der mit I bezeichnet sei. I kann damit die Werte 1/2 oder 3/2 bekommen, 3/2 jedoch nur für t=1. Also:

$$|1/2, 1/2; t, t_3\rangle_{\alpha\beta} = \sum_{m_1, m_2} \langle \tfrac{1}{2} m_1 \tfrac{1}{2} m_2 | t t_3 \rangle \, |\tfrac{1}{2} m_1\rangle_\alpha \, |\tfrac{1}{2} m_2\rangle_\beta \qquad (2.36)$$

Und weiter:

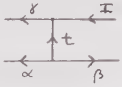
$$|\tfrac{1}{2}, t; I, I_3\rangle_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{m_3, t_3} \langle \tfrac{1}{2} m_3 \, t \, t_3 | I I_3 \rangle \, |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; t, t_3\rangle_{\alpha\beta} \, |\tfrac{1}{2} m_3\rangle_\gamma \qquad (2.37)$$

$$= \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3 \\ t_3}} \langle \tfrac{1}{2} m_1 \tfrac{1}{2} m_2 | t t_3 \rangle \langle \tfrac{1}{2} m_3 \, t \, t_3 | I I_3 \rangle \, |\tfrac{1}{2} m_1\rangle_\alpha \, |\tfrac{1}{2} m_2\rangle_\beta \, |\tfrac{1}{2} m_3\rangle_\gamma$$

$|\tfrac{1}{2} m\rangle_\alpha$ sind dabei Isospin-Wellenfunktionen zum Isospin 1/2 und der Projektion m. Mit der Darstellung (2.34) folgt:

$$|\tfrac{1}{2}, t; I, I_3\rangle_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{t_3} \langle \tfrac{1}{2} \alpha \tfrac{1}{2} \beta | t t_3 \rangle \langle t t_3 \tfrac{1}{2} \gamma | I I_3 \rangle$$

$$= [I, t]^{1/2} \qquad (2.38)$$



$$=: \overset{(FFF)}{\Gamma}{}^{t I I_3}_{\alpha\beta\gamma}$$

In (2.38) wurde von der im Anhang eingeführten Graphenschreibweise für Clebsch-Gordan-Koeffizienten Gebrauch gemacht.
Der Einfachheit halber haben wir uns auf den Fall B=FFF beschränkt, da sich hier die Spinorindizes α, β, γ alle gleich, und zwar wie untere gepunktete Indizes transformieren. Die anderen Fälle ergeben sich einfach durch Heben oder Senken eines Index, was einer Multiplikation mit dem metrischen Tensor c_τ im Isospinraum bzw. einer Umkehrung der zugehörigen Spinorlinie in der Graphenschreibweise gleichkommt.

$$\overset{(FFF)}{\underset{\alpha\beta\gamma}{\top}} t I I_3 = [I,t]^{1/2} \quad \overset{\gamma}{\underset{\alpha}{\uparrow}} \overset{I}{\underset{\beta}{\downarrow}} t = \overset{(AAA)}{\underset{\alpha\beta\gamma}{\top}} t I I_3$$

$$\overset{(FFA)}{\underset{\alpha\beta\gamma}{\top}} t I I_3 = [I,t]^{1/2} \quad \overset{\gamma}{\underset{\alpha}{\uparrow}} \overset{I}{\underset{\beta}{\downarrow}} t = \overset{(AAF)}{\underset{\alpha\beta\gamma}{\top}} t I I_3$$

$$\overset{(FAF)}{\underset{\alpha\beta\gamma}{\top}} t I I_3 = [I,t]^{1/2} \quad \overset{\gamma}{\underset{\alpha}{\uparrow}} \overset{I}{\underset{\beta}{\downarrow}} t = \overset{(AFA)}{\underset{\alpha\beta\gamma}{\top}} t I I_3 \qquad (2.39)$$

$$\overset{(AFF)}{\underset{\alpha\beta\gamma}{\top}} t I I_3 = [I,t]^{1/2} \quad \overset{\gamma}{\underset{\alpha}{\uparrow}} \overset{I}{\underset{\beta}{\downarrow}} t = \overset{(FAA)}{\underset{\alpha\beta\gamma}{\top}} t I I_3$$

Die Beziehungen für die Teilchen-Antiteilchen-konjugierten Zustände ergeben sich unmittelbar aus der Realität der Clebsch-Gordan-Koeffizienten.
Damit erhalten wir für die Darstellung der 3-Punktfunktionen:

$$\chi^{(K)}\left(\begin{matrix} P \\ \alpha_2\alpha_3,\beta_2\beta_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \mathcal{Y}-P \\ \gamma_2\gamma_3 \end{matrix}\right) = \sum_{tII_3} \left(\frac{2t+1}{8}\right)^{1/2} \chi_I^{(K)}\left(t; \begin{matrix} P \\ \alpha_2\beta_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \mathcal{Y}-P \\ \gamma_2 \end{matrix}\right) \overset{(K)}{\underset{\alpha_3\beta_3\gamma_3}{\top}} t I I_3 \qquad (2.40)$$

wobei der Faktor $\left(\frac{2t+1}{8}\right)^{1/2}$ nur aus rechentechnischen Gründen eingeführt wurde.
Da die in (2.39) angegebenen Isospinzustände der Orthogonalitätsrelation

$$\overset{(K)}{\underset{\alpha\beta\gamma}{\top}} t I I_3 \; \overset{(K)}{\underset{\alpha\beta\gamma}{\top}} t' I' I_3'^{\,*} = \delta_{tt'} \delta_{II'} \delta_{I_3 I_3'} \qquad (2.41)$$

genügen, wie man sofort mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation für Clebsch-Gordan-Koeffizienten nachweist, so lassen sich leicht die Gleichungen für die Partialamplituden $\chi_I^{(K)}\left(t; \begin{matrix} P \\ \alpha_2\beta_2 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \mathcal{Y}-P \\ \gamma_2 \end{matrix}\right)$ angeben, die

jetzt sowohl zu einer bestimmten Baryonenzahl, als auch zu einem bestimmten Gesamtisospin I und einem Isospin t des "Bosonen"-Untersystems gehören, wobei letzterer jedoch keine Erhaltungsgröße ist. Da die starken Wechselwirkungen ladungsunabhängig sind, können die Partialamplituden nicht auch von der Projektion des Isospins abhängen.
Wenn wir die Darstellungen (2.35) und (2.40) in die Gleichungen (2.19-23) einsetzen, so folgt unter Ausnutzung der Relationen (2.34, 51):

$$\chi^{(F)}_{1/2}\left(\begin{smallmatrix} J \\ \beta \end{smallmatrix}\right) = \tag{2.42}$$

$$= \frac{e^2}{8} G^{\mu}(J)(\bar{\sigma}_{\mu})_{\beta\alpha} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \Big\{ C_{\sigma,\beta\gamma} C_{\sigma,\alpha\delta}\, \chi^{(FFA)}_{1/2}\left(1; \begin{smallmatrix} p \\ \beta\gamma \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} J-p \\ \delta \end{smallmatrix}\right)$$

$$+ \frac{1}{12} \sigma^{\nu}_{\beta\gamma} \sigma_{\nu,\delta\alpha} \sum_t \Big[\chi^{(FAF)}_{1/2}\left(t; \begin{smallmatrix} p \\ \beta\delta \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} J-p \\ \gamma \end{smallmatrix}\right) + (-)^{t+1} \chi^{(AFF)}_{1/2}\left(t; \begin{smallmatrix} p \\ \gamma\beta \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} J-p \\ \delta \end{smallmatrix}\right) \Big] \Big\}$$

$$\chi^{(FFF)}_{I}\left(t; \begin{smallmatrix} p \\ \sigma\varkappa \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} J-p \\ \tau \end{smallmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{6} \delta_{t,1} \sum_i^q K_i(1;p) P_i'^{\mu\nu}(p) (\bar{\sigma}_{\mu} C_{\sigma} \bar{\sigma}^{T}_{\nu})_{\sigma\varkappa} C_{\tau,\gamma\delta}\, \chi^{(FFF)}_{I}\left(1; \begin{smallmatrix} p \\ \gamma\delta \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} J-p \\ \tau \end{smallmatrix}\right) \tag{2.43}$$

$$- \frac{e^2}{3} T(I,t,1) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Big[G^{\mu}(q+p-J) F^{\nu}(J-p) + G^{\nu}(J-p) F^{\mu}(q+p-J) \Big] \times$$

$$\times \Big\{ (\bar{\sigma}_{\mu} C_{\sigma} \bar{\sigma}^{T}_{\nu})_{\varkappa\tau} C_{\tau,\gamma\delta}\, \chi^{(FFF)}_{I}\left(1; \begin{smallmatrix} q \\ \gamma\delta \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} J-q \\ \sigma \end{smallmatrix}\right) + (-)^{t+1} (\bar{\sigma}_{\nu} C_{\sigma} \bar{\sigma}^{T}_{\mu})_{\tau\sigma} C_{\tau,\gamma\delta}\, \chi^{(FFF)}_{I}\left(1; \begin{smallmatrix} q \\ \gamma\delta \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} J-q \\ \varkappa \end{smallmatrix}\right) \Big\}$$

$$\chi^{(FFA)}_{I}\left(t; \begin{smallmatrix} p \\ \sigma\varkappa \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} J-p \\ \tau \end{smallmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{6} \delta_{t,1} \sum_i^q K_i(1;p) P_i'^{\mu\nu}(p) (\bar{\sigma}_{\mu} C_{\sigma} \bar{\sigma}^{T}_{\nu})_{\sigma\varkappa} C_{\tau,\gamma\delta}\, \chi^{(FFA)}_{I}\left(1; \begin{smallmatrix} p \\ \gamma\delta \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} J-p \\ \tau \end{smallmatrix}\right)$$

$$+ \frac{e^2}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Big[G^{\mu}(q+p-J) F^{\nu}(J-p) + G^{\nu}(J-p) F^{\mu}(q+p-J) \Big] \sum_{t'} (-)^{t'+1} T(I,t,t') \times$$

$$\times \Big\{ (\bar{\sigma}_{\mu} \sigma^{\varepsilon} \bar{\sigma}_{\nu})_{\varkappa\tau} \sigma_{\varepsilon,\gamma\delta}\, \chi^{(FAF)}_{I}\left(t'; \begin{smallmatrix} q \\ \gamma\delta \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} J-q \\ \sigma \end{smallmatrix}\right) + (-)^{t} (\bar{\sigma}_{\mu} \sigma^{\varepsilon} \bar{\sigma}_{\nu})_{\sigma\tau}\, \chi^{(FAF)}_{I}\left(t'; \begin{smallmatrix} q \\ \gamma\delta \end{smallmatrix} \middle| \begin{smallmatrix} J-q \\ \varkappa \end{smallmatrix}\right) \Big\} \tag{2.44}$$

$$+ \frac{2}{3} \delta_{I,1/2} \delta_{t,1} \sum_i^b \Big[2 K_i(1;p) F^{\lambda}(J-p) + K_i(1;p) G^{\lambda}(J-p) \Big] P_i'^{\mu\nu}(p) (\bar{\sigma}_{\mu} C_{\sigma} \bar{\sigma}^{T}_{\nu})_{\sigma\varkappa} (\bar{\sigma}^{T}_{\lambda} C_{\sigma})_{\tau\delta}\, \chi^{(F)}_{1/2}\left(\begin{smallmatrix} J \\ \delta \end{smallmatrix}\right)$$

$$+ \frac{8}{3} \delta_{I,1/2} F^{\mu}(J-p) \Big\{ (\bar{\sigma}_{\mu})_{\varkappa\tau}\, \chi^{(F)}_{1/2}\left(\begin{smallmatrix} J \\ \sigma \end{smallmatrix}\right) + (-)^{t} (\bar{\sigma}_{\mu})_{\sigma\tau}\, \chi^{(F)}_{1/2}\left(\begin{smallmatrix} J \\ \varkappa \end{smallmatrix}\right) \Big\}$$

$$\chi_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{FAF})}(t;\ {}^{p}_{\sigma\kappa}\,|\,{}^{\mathfrak{I}-p}_{\tau}) =$$

$$= \frac{1}{12}\sum_{i}^{q} K_i(t;p)\,P_i^{\lambda\mu\nu}(p)\,(\bar\sigma_\mu\sigma^\varepsilon\bar\sigma_\nu)_{\sigma\kappa}\,\bar\sigma_{\varepsilon,\gamma\delta}\;\chi_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{FAF})}(t;\ {}^{p}_{\gamma\delta}\,|\,{}^{\mathfrak{I}-p}_{\tau})$$

$$+\frac{e^2}{12}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\left[G^\mu(q+p-\mathfrak{I})F^\nu(\mathfrak{I}-p)+G^\nu(\mathfrak{I}-p)\,F^\mu(q+p-\mathfrak{I})\right]\cdot$$

$$\cdot\Big\{2\sum_{t'}T(\mathrm{I},t,t')\,(\bar\sigma_\nu\sigma^\varepsilon\bar\sigma_\mu)_{\tau\kappa}\,\bar\sigma_{\varepsilon,\gamma\delta}\;\chi_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{FAF})}(t';\ {}^{q}_{\gamma\delta}\,|\,{}^{\mathfrak{I}-q}_{\sigma})$$

$$+4\,(-)^{t+1}\,T(\mathrm{I},t,1)\,(\bar\sigma_\nu C_\sigma\bar\sigma_\mu^{T})_{\tau\sigma}\,C_{\sigma,\gamma\delta}\;\chi_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{FFA})}(1;\ {}^{q}_{\gamma\delta}\,|\,{}^{\mathfrak{I}-q}_{\kappa})\Big\}$$

$$-\frac{1}{6}\,\delta_{\mathrm{I},1/2}\sum_{i}\left[2\,K_i^{q}(t;p)F^\lambda(\mathfrak{I}-p)+K_i^{b}(t;p)G^\lambda(\mathfrak{I}-p)\right]P_i^{\prime\lambda\mu\nu}(p)\,(\bar\sigma_\mu\sigma^\varepsilon\bar\sigma_\nu)_{\sigma\kappa}\,(\bar\sigma_\lambda\bar\sigma_\varepsilon)_{\tau\delta}\;\chi_{1/2}^{(\mathrm{F})}({}^{\mathfrak{I}}_{\delta}) \qquad (2.45)$$

$$+\frac{8}{3}\,\delta_{\mathrm{I},1/2}\,F^\mu(\mathfrak{I}-p)\,(\bar\sigma_\mu)_{\tau\kappa}\;\chi_{1/2}^{(\mathrm{F})}({}^{\mathfrak{I}}_{\sigma})$$

Da nur noch Indizes im Spin-Raum auftreten, wurde der zusätzliche Index "2" weggelassen.
Zur Abkürzung wurde gesetzt:

$$K_i^{q}(t;p) := -\frac{3}{4}\frac{1}{[t]}\left(\frac{\kappa\ell}{2\pi}\right)^2 q_i\left(\frac{p^2}{\kappa^2}\right),\qquad K_i^{b}(t;p) := -\frac{3}{4}\frac{1}{[t]}\left(\frac{\kappa\ell}{2\pi}\right)^2 b_i\left(\frac{p^2}{\kappa^2}\right)$$

$$T(\mathrm{I},t,t') := 3\,(-)^{t+t'+1}\begin{Bmatrix}1/2 & t' & \mathrm{I}\\ 1/2 & t & 1/2\end{Bmatrix} \qquad (2.46)$$

$K_i^{q}(t;p)$ ist der bekannte Eigenwertoperator für Bosonen, wie er in den niedrigsten Näherungen der Bosonengleichungen auftritt.
Weiter wurde von der Relation

$$\chi_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{FAF})}(t;\ {}^{p}_{\alpha\beta}\,|\,{}^{\mathfrak{I}-p}_{\gamma}) = (-)^{t+1}\;\chi_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{AFF})}(t;\ {}^{p}_{\beta\alpha}\,|\,{}^{\mathfrak{I}-p}_{\gamma}) \qquad (2.47)$$

Gebrauch gemacht, die aus den Gleichungen für $\chi_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{FAF})}$ und $\chi_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{AFF})}$ folgt. Daher tritt $\chi_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{AFF})}$ in obigen Gleichungen nicht mehr auf.

Damit haben wir aus dem ursprünglichen Gleichungssystem (2.1,2) ein System von Gleichungen gewonnen, das nach den guten Quantenzahlen der Spinortheorie, der Baryonenzahl und dem Isospin klassifiziert ist. Wie man sofort erkennt, treten in den Gleichungen auf der rechten Seite nur Beiträge auf, die zum selben Wert der Erhaltungsgrößen wie auf der linken Seite gehören.
Es verbleibt noch die Spin-Ausreduktion, die in den folgenden Abschnitten durchgeführt werden soll. Zusammenfassend haben wir für die 1-Punktfunktion und die 3-Punktfunktionen folgende Darstellungen verwendet:

$$\chi_1\left(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\right) = \sum_{B,I_3} \lambda^{(B)}_{\alpha_1}\, \chi^{(B)}_{1/2}\left(\alpha_2\right) \overline{T}^{(B)\,1/2\,I_3}_{\alpha_3}\,, \qquad B = F, A \tag{2.48}$$

$$\hat{\chi}_3\left(\alpha_1\alpha_2\alpha_3,\beta_1\beta_2\beta_3 \,\middle|\, {}^{\gamma-\rho}_{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}\right) = \sum_{K,I,t,I_3} \Lambda^{(K)}_{\alpha_1\beta_1\gamma_1}\, \chi^{(K)}_{I}\left(t;\, {}^{\rho}_{\alpha_2\beta_2} \,\middle|\, {}^{\gamma-\rho}_{\gamma_2}\right) \left(\frac{2t+1}{8}\right)^{1/2} \overline{T}^{(K)\,tI\,I_3}_{\alpha_3\beta_3\gamma_3} \tag{2.49}$$

Wie man aus (2.43) entnehmen kann, tritt das Baryon mit der Baryonenzahl B=3 (z.B. ein Triton-Zustand) in niedrigster Näherung als Resonanz eines Spinsinglett-Isotriplett-Zustandes mit B=2 mit einem dritten Baryon auf. Da jedoch beim Deuteron und Triton wegen ihrer losen Struktur die π-Mesonenwechselwirkung eine wesentliche Rolle spielen dürfte, welche aber erst in höheren Näherungen erfaßt wird, sollte man auch nicht erwarten, daß aus (2.43) die richtigen Masseneigenwerte des B=3-Zustandes zu erhalten sind. Der Vollständigkeit halber wird er jedoch weiter behandelt.
Für einen Baryonenzustand mit B=1 und Spin und Isospin 1/2 haben wir somit das gekoppelte System (2.42, 44, 45) zu lösen. Für Baryonen mit anderen Spin- und Isospin-Quantenzahlen werden die Gleichungen für die 3-Punktfunktionen von der Gleichung für die 1-Punktfunktion entkoppelt. Für t=0 wird weiter wegen $T(3/2, 0, 1)=0$ die "Mesonen"-Gleichung (d.h. die Gleichung (2.45), wo das "Bosonen"-Untersystem die Baryonenzahl B=0 besitzt) von der "Deuteron"-Gleichung (wo die Baryonenzahl des Teilsystems gleich 2 ist) entkoppelt, da nur das Spinsinglett-Isotriplett zur "Meson"-Baryon-Resonanz beiträgt. Andererseits verschwindet in diesem Fall auch der eigentliche Integralkern von (2.45), so daß man über die niedrigste Näherung nicht hinauskommt. Man hat folglich in jedem Fall ein gekoppeltes System vor sich, das nur durch weitere physikalische Näherungsannahmen zu entkoppeln ist. Eine mögliche Annahme wäre z.B. zu vermuten, daß das Deuteron zu dem Baryonenzustand einen gegenüber den mesonischen Anteilen vernachlässigbaren Anteil liefert, was für I=3/2 zu einer entkoppelten Gleichung (2.45) führen würde. Die so aus (2.45) folgende Gleichung stimmt ihrer analytischen Struktur nach mit der in [20] erhaltenen Gleichung für eine $\hat{\varphi}_3$-Amplitude überein. Daher kann wie dort die 3-Punktfunktion $\hat{\chi}_3$ als eine BETHE-SALPETER-Amplitude für das betrachtete Baryon angesehen

werden, mit Polen bei der Masse des "Mesons" mit Spin i und Isospin t, und der Masse des Nukleons mit Spin und Isospin 1/2. Der Mesonenpol tritt dabei im Bosonenoperator $K_i^q(t;\rho)$ des ersten Terms auf der rechten Seite von (2.45) auf, während der Nukleonenpol in der Zweipunktfunktion des Integralkerns enthalten ist.
Auch die Gleichungen (2.43) und (2.44) zeigen die richtige Polstruktur, da die jeweils ersten Terme dem Operator der Deuteronenеigenwertgleichung entsprechen, wie sich bei der Behandlung der Bosonengleichung im nächsten Abschnitt zeigen wird. Der Nukleonenpol ist ebenfalls in der Zweipunktfunktion des Integralkerns enthalten. Damit können wir auch diese Gleichungen als BETHE-SALPETER-Gleichungen deuten.

2.2. Die Bosonengleichung

Im Gegensatz zum Fermionenfall liefert bei den Bosonen schon die niedrigste Näherung, bei der alle χ -Funktionen außer χ_2 Null gesetzt werden, eine nichttriviale, wenn auch algebraische Gleichung. Wenn wir in (1.70) n die Werte 2 und 4 annehmen lassen, so erhalten wir unter Vernachlässigung der χ_6 -Funktionen ein Gleichungssystem, das im Prinzip zur Bestimmung der χ_2 - und χ_4 -Funktionen und der entsprechenden Eigenwerte dienen kann:

$$\chi_2\left(\begin{smallmatrix}x&y\\ \sigma&\kappa\end{smallmatrix}\right) = V_{\alpha\beta\gamma\delta}\int d^4\bar{x}\left\{\frac{1}{8}\left[G_{\sigma\alpha}(x-\bar{x})\,\chi_4\left(\begin{smallmatrix}\bar{x}&\bar{x}&\bar{x}&y\\ \beta&\gamma&\delta&\kappa\end{smallmatrix}\right) - G_{\kappa\alpha}(y-\bar{x})\,\chi_4\left(\begin{smallmatrix}\bar{x}&\bar{x}&\bar{x}&x\\ \beta&\gamma&\delta&\sigma\end{smallmatrix}\right)\right]\right. \tag{2.50}$$
$$\left. -\frac{3}{4}\left[G_{\sigma\alpha}(x-\bar{x})F_{\kappa\beta}(y-\bar{x}) - G_{\kappa\alpha}(y-\bar{x})F_{\sigma\beta}(x-\bar{x})\right]\chi_2\left(\begin{smallmatrix}\bar{x}&\bar{x}\\ \gamma&\delta\end{smallmatrix}\right)\right\}$$

$$\chi_4\left(\begin{smallmatrix}x_1\cdots x_4\\ \alpha_1\cdots\alpha_4\end{smallmatrix}\right) = \sum_{1\le\lambda_1<\lambda_2\le 4}(-)^{\lambda_1+\lambda_2}F_{\alpha_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_2}}(x_{\lambda_1}-x_{\lambda_2})\,\chi_2\left(\begin{smallmatrix}\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}&x_1\cdots x_4\\ &\alpha_1\cdots\alpha_4\end{smallmatrix}\right)$$
$$+V_{\alpha\beta\gamma\delta}\int d^4x\left\{\frac{3}{4}\sum_{\substack{1\\ \lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3}}^{4}(-)^{\sigma_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}}G_{\alpha_{\lambda_1}\alpha}(x_{\lambda_1}-x)F_{\alpha_{\lambda_2}\beta}(x_{\lambda_2}-x)F_{\alpha_{\lambda_3}\gamma}(x_{\lambda_3}-x)\,\chi_2\left(\begin{smallmatrix}x&\frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}&x_1&x\\ \delta&&\alpha_1&\alpha\end{smallmatrix}\right)\right. \tag{2.51}$$
$$\left. -\frac{3}{8}\sum_{\substack{1\\ \lambda_1\neq\lambda_2}}^{4}(-)^{\sigma_{\lambda_1\lambda_2}}G_{\alpha_{\lambda_1}\alpha}(x_{\lambda_1}-x)F_{\alpha_{\lambda_2}\beta}(x_{\lambda_2}-x)\,\chi_4\left(\begin{smallmatrix}x&x&\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}&x_1\cdots x_4\\ \gamma&\delta&&\alpha_1\cdots\alpha_4\end{smallmatrix}\right)\right\}$$

Oder im Impulsraum:

$$\chi_2\left(\begin{smallmatrix} J-p & p \\ \sigma & \varkappa \end{smallmatrix}\right) = -\frac{3}{4} V_{\alpha\beta\gamma\delta}\left[G_{\sigma\alpha}(J-p)F_{\varkappa\beta}(p) - G_{\varkappa\alpha}(p)F_{\sigma\beta}(J-p)\right]\overset{1}{\chi}_2\left(\begin{smallmatrix} J \\ \gamma\delta \end{smallmatrix}\right)$$

$$+\frac{1}{8} V_{\alpha\beta\gamma\delta}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\left\{G_{\sigma\alpha}(J-p)\overset{1}{\chi}_4\left(\begin{smallmatrix} J-p-q & q & p \\ \beta\gamma & \delta & \varkappa \end{smallmatrix}\right) - G_{\varkappa\alpha}(p)\overset{1}{\chi}_4\left(\begin{smallmatrix} p-q & q & J-p \\ \beta\gamma & \delta & \sigma \end{smallmatrix}\right)\right\} \tag{2.52}$$

$$\chi_4\left(\begin{smallmatrix} q_1 \cdots q_4 \\ \alpha_1 \cdots \alpha_4 \end{smallmatrix}\right) = (2\pi)^4 \sum_{1\le\lambda_1<\lambda_2\le 4} (-)^{\lambda_1+\lambda_2}\,\delta^{(4)}(q_{\lambda_1}+q_{\lambda_2})F_{\alpha_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_2}}(q_{\lambda_1})\,\chi_2\left(\begin{smallmatrix} 1 & q_1 \cdots q_4 \\ \lambda_1\lambda_2 & \alpha_1 \cdots \alpha_4 \end{smallmatrix}\right) \tag{2.53}$$

$$+V_{\alpha\beta\gamma\delta}\left\{\frac{3}{4}\sum_{\substack{1\\ \lambda_1\neq\lambda_2\neq\lambda_3}}^{4}(-)^{\sigma_{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}} G_{\alpha_{\lambda_1}\alpha}(q_{\lambda_1})F_{\alpha_{\lambda_2}\beta}(q_{\lambda_2})F_{\alpha_{\lambda_3}\delta}(q_{\lambda_3})\,\chi_2\left(\begin{smallmatrix} q_{\lambda_1}+q_{\lambda_2}+q_{\lambda_3} & \frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} & q_1 \cdots q_4 \\ \delta & & \alpha_1 \cdots \alpha_4 \end{smallmatrix}\right)\right. \tag{2.53}$$

$$\left.-\frac{3}{8}\sum_{\substack{1\\ \lambda_1\neq\lambda_2}}^{4}(-)^{\sigma_{\lambda_1\lambda_2}} G_{\alpha_{\lambda_1}\alpha}(q_{\lambda_1})F_{\alpha_{\lambda_2}\beta}(q_{\lambda_2})\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\chi_4\left(\begin{smallmatrix} q_{\lambda_1}+q_{\lambda_2}-p & p & \frac{1}{\lambda_1\lambda_2} & q_1 \cdots q_4 \\ \gamma & \delta & & \alpha_1 \cdots \alpha_4 \end{smallmatrix}\right)\right\}$$

Man erkennt, daß (2.53) eine große Anzahl von Termen besitzt, so daß eine konsequente Behandlung des vollen Systems (2.52, 53) wenn nicht auf prinzipielle Schwierigkeiten, so doch zu der Grenze dessen führen würde, was in endlicher Zeit zu bewältigen ist. Wir wollen folglich nicht das ganze System behandeln, sondern machen von vorneherein die Annahme, daß wir auf der rechten Seite von (2.53) nur die χ_2 -Anteile zu berücksichtigen brauchen. Diese reduzierte Gleichung für χ_4 setzen wir in (2.52) ein. Das führt auf die Gleichung:

$$\chi_2\left(\begin{smallmatrix} J-p & p \\ \sigma & \varkappa \end{smallmatrix}\right) =$$

$$= -\frac{3}{8} V_{\alpha\beta\gamma\delta}\left[G_{\sigma\alpha}(J-p)F_{\varkappa\beta}(p) - G_{\varkappa\alpha}(p)F_{\sigma\beta}(J-p)\right]\overset{1}{\chi}_2\left(\begin{smallmatrix} J \\ \gamma\delta \end{smallmatrix}\right)$$

$$-\frac{3}{16} V_{\alpha\beta\gamma\delta}V_{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\int\frac{d^4q\,d^4q'}{(2\pi)^8}\left\{3\left[G_{\sigma\alpha}(J-p)G_{\beta\alpha'}(J-p-q-q')\,\chi_2\left(\begin{smallmatrix} J-p & p \\ \delta' & \varkappa \end{smallmatrix}\right)\right.\right.$$

$$\left.-G_{\varkappa\alpha}(p)G_{\beta\alpha'}(p-q-q')\,\chi_2\left(\begin{smallmatrix} p & J-p \\ \delta' & \sigma \end{smallmatrix}\right)\right]F_{\beta\beta'}(q)F_{\delta\gamma'}(q') \tag{2.54}$$

$$+2\left[G_{\sigma\alpha}(J-p)\,G_{\beta\alpha'}(J-p-q-q')\,F_{\varkappa\beta'}(p)\right.$$

$$\left.-G_{\varkappa\alpha}(p)\,G_{\beta\alpha'}(p-q-q')\,F_{\sigma\beta'}(J-p)\right]F_{\gamma\gamma'}(q)\,\chi_2\left(\begin{smallmatrix} J-q' & q' \\ \delta' & \delta \end{smallmatrix}\right)$$

$$+\left[G_{\sigma\alpha}(J-p)\,G_{\varkappa\beta'}(p)\,F_{\beta\alpha'}(J-p-q-q')\right.$$

$$\left.\left.-G_{\varkappa\alpha}(p)\,G_{\sigma\beta'}(J-p)F_{\beta\alpha'}(p-q-q')\right]F_{\gamma\gamma'}(q)\,\chi_2\left(\begin{smallmatrix} J-q' & q' \\ \delta' & \delta \end{smallmatrix}\right)\right\}$$

Wir führen die Bezeichnungen ein:

$$K^F_{\alpha\beta}(J) := -\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{e^2}{2}\right)^2 \int \frac{d^4q\, d^4q'}{(2\pi)^8} [G(J) V_i F(q) V_j F(q') V_i G(J-q-q') V_j]_{\alpha\beta} \tag{2.55}$$

$$K^B_G(J)_{\alpha\beta,\gamma\delta} := -\frac{3e^2}{4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [G(J-q) V_i F(q)]_{\alpha\beta} [V_i]_{\gamma\delta} \tag{2.56}$$

$$K^B_F(J)_{\alpha\beta,\gamma\delta} := -\frac{3e^2}{4} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} [F(J-q) V_i F(q)]_{\alpha\beta} [V_i]_{\gamma\delta} \tag{2.57}$$

Damit kann (2.54) in der Form geschrieben werden:

$$[1 - \tfrac{3}{8} K^F(J-p) - \tfrac{3}{8} K^F(p)] \chi_2\left(\begin{matrix} J-p & p \\ \sigma & \kappa \end{matrix}\right) =$$

$$= -\frac{3}{8} V_{\alpha\beta\gamma\delta} [G_{\sigma\alpha}(J-p) F_{\kappa\beta}(p) - G_{\kappa\alpha}(p) F_{\sigma\beta}(J-p)] \chi_2^1\left(\begin{matrix} J \\ \gamma\delta \end{matrix}\right)$$

$$-\tfrac{1}{8} V_{\alpha\beta\gamma\delta} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Big\{ 2 \Big[G_{\sigma\alpha}(J-p) F_{\kappa\gamma'}(p) K^B_G(J-p-q)_{\beta\gamma,\delta\delta'} - G_{\kappa\alpha}(p) F_{\sigma\gamma'}(J-p) K^B_G(p-q)_{\beta\gamma,\delta\delta'} \Big] + \Big[G_{\sigma\alpha}(J-p) G_{\kappa\gamma'}(p) K^B_F(J-p-q)_{\beta\gamma,\delta\delta'} - G_{\kappa\alpha}(p) G_{\sigma\gamma'}(J-p) K^B_F(p-q)_{\beta\gamma,\delta\delta'} \Big] \Big\} \times \chi_2\left(\begin{matrix} J-q & q \\ \delta' & \delta \end{matrix}\right) \tag{2.58}$$

Dabei wurde benutzt, daß $K^F_{\alpha\beta}(J)$ die Form

$$K^F_{\alpha\beta}(J) = : K^F(J)\, \delta_{\alpha\beta} \tag{2.59}$$

besitzt.

Die Ausreduktion nach der Baryoneneichgruppe und der Isospingruppe kann ganz analog zu dem Verfahren bei den Baryonengleichungen durchgeführt werden.

2. 2. 1. Ausreduktion nach der Baryoneneichgruppe

Als mögliche Baryonenzustände folgen wie in 3. 1. 1. die direkten Produkte:

$$\underline{B=2}: \quad \Lambda^{(FF)}_{\alpha\beta} \qquad \underline{B=0}: \quad \Lambda^{(FA)}_{\alpha\beta}\,\Lambda^{(AF)}_{\alpha\beta} \qquad \underline{B=-2}: \quad \Lambda^{(AA)}_{\alpha\beta} \tag{2.60}$$

Die $\Lambda^{(K)}_{\alpha\beta}$ genügen der Orthogonalitätsrelation:

$$\Lambda^{(K)}_{\alpha\beta}\;\Lambda^{(K')\,*}_{\alpha\beta} = \delta_{KK'} \tag{2.61}$$

wo K, K' zwei der in (2. 60) vorkommenden Konfigurationen sind. Für die χ_2 -Funktionen erhalten wir damit im λ -Raum die Darstellung:

$$\chi_2\left(\begin{matrix}\mathfrak{J}-p & p\\ \sigma_2\sigma_3\,,\,\kappa_1\kappa_2\kappa_3\end{matrix}\right) = \sum_K \Lambda^{(K)}_{\sigma_1\kappa_1}\,\chi^{(K)}\left(\begin{matrix}\mathfrak{J}-p & p\\ \sigma_2\sigma_3 & \kappa_2\kappa_3\end{matrix}\right) \tag{2.62}$$

Die Summation geht über alle 4 Basisvektoren (2. 60). Unter Benutzung von (2. 61) folgen dann aus (2. 58) die Gleichungen zu bestimmten Baryonenzahlen:

$$\left[1-K^F(\mathfrak{J},p)\right]\chi^{(FF)}\left(\begin{matrix}\mathfrak{J}-p & p\\ \sigma_2\sigma_3 & \kappa_2\kappa_3\end{matrix}\right) = \tag{2.63}$$

$$= \frac{e^2}{4}\left[G^\mu(\mathfrak{J}-p)F^\nu(p)+G^\nu(p)F^\mu(\mathfrak{J}-p)\right](\bar\sigma_\mu C_\sigma\bar\sigma_\nu\Gamma)_{\sigma_2\kappa_2}C_{\sigma_1\alpha_2\beta_2}\left[C_\sigma I^1 C_\sigma\right]_{\sigma_3\kappa_3,\alpha_3\beta_3}\chi^{(FF)}\left(\begin{matrix}1 & \mathfrak{J}\\ \alpha_2\alpha_3, & \beta_2\beta_3\end{matrix}\right)$$

$$+\frac{e^2}{192}\left(\frac{\varkappa\ell}{2\pi}\right)^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\Big\{\sum_i q_i\left(\frac{(p-q)^2}{\varkappa^2}\right)P_i^{\lambda\varkappa}(p-q)F^\mu(\mathfrak{J}-p)G^\nu(p)(\bar\sigma_\mu\sigma_\varkappa)_{\sigma_2\alpha_2}(\bar\sigma_\nu\sigma_\lambda)_{\kappa_2\beta_2}\left[9I^0+I^1\right]_{\kappa_3\beta_3,\sigma_3\alpha_3}$$
$$-\sum_i q_i\left(\frac{(\mathfrak{J}-p-q)^2}{\varkappa^2}\right)P_i^{\lambda\varkappa}(\mathfrak{J}-p-q)G^\nu(\mathfrak{J}-p)F^\mu(p)(\bar\sigma_\mu\sigma_\lambda)_{\sigma_2\beta_2}(\bar\sigma_\nu\sigma_\varkappa)_{\kappa_2\alpha_2}\left[9I^0+I^1\right]_{\sigma_3\beta_3,\kappa_3\alpha_3}\Big\}\chi^{(FF)}\left(\begin{matrix}\mathfrak{J}-q & q\\ \alpha_2\alpha_3, & \beta_2\beta_3\end{matrix}\right)$$

$$+\frac{e^2}{384}\left(\frac{\varkappa\ell}{2\pi}\right)^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\Big\{\sum_i b_i\left(\frac{(p-q)^2}{\varkappa^2}\right)P_i^{\lambda\varkappa}(p-q)G^\mu(\mathfrak{J}-p)G^\nu(p)(\bar\sigma_\mu\sigma_\varkappa)_{\sigma_2\alpha_2}(\bar\sigma_\nu\sigma_\lambda)_{\kappa_2\beta_2}\left[9I^0+I^1\right]_{\kappa_3\beta_3,\sigma_3\alpha_3}$$
$$-\sum_i b_i\left(\frac{(\mathfrak{J}-p-q)^2}{\varkappa^2}\right)P_i^{\lambda\varkappa}(\mathfrak{J}-p-q)G^\mu(\mathfrak{J}-p)G^\nu(p)(\bar\sigma_\mu\sigma_\lambda)_{\sigma_2\beta_2}(\bar\sigma_\nu\sigma_\varkappa)_{\kappa_2\alpha_2}\left[9I^0+I^1\right]_{\sigma_3\beta_3,\kappa_3\alpha_3}\Big\}\chi^{(FF)}\left(\begin{matrix}\mathfrak{J}-q & q\\ \alpha_2\alpha_3 & \beta_2\beta_3\end{matrix}\right)$$

$$[1-K^F(J,p)]\,\chi^{(FA)}\left(\begin{matrix}J-p & p\\ \sigma_2\sigma_3 & \kappa_2\kappa_3\end{matrix}\right) =$$

$$= -\frac{\ell^2}{8}\left[G^\mu(J-p)F^\nu(p)+G^\nu(p)F^\mu(J-p)\right](\bar\sigma_\mu\sigma^\varepsilon\bar\sigma_\nu)_{\sigma_2\kappa_2}\,\sigma_{\varepsilon,\beta_2\alpha_2}\left[3I^0+I^1\right]_{\sigma_3\kappa_3,\beta_3\alpha_3} \qquad (2.64)$$
$$\times\ \chi^{(FA)}\left(\begin{matrix}J\\ \kappa_2\alpha_3,\ \beta_2\beta_3\end{matrix}\right)$$

$$+\frac{\ell^2}{192}\left(\frac{\kappa\ell}{2\pi}\right)^2\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\Bigg\{2\sum_i P_i^{\lambda\lambda}(J-p-q)(\bar\sigma_\mu C_\sigma)_{\sigma_2\beta_2}(\bar\sigma_\nu^T C_\sigma)_{\kappa_2\alpha_2}\left[C_\tau I^1 C_\tau\right]_{\kappa_3\alpha_3,\sigma_3\beta_3}$$
$$\times\left[q_i\left(\tfrac{(J-p-q)^2}{\kappa^2}\right)\left(G^\mu(J-p)F^\nu(p)+F^\mu(J-p)G^\nu(p)\right)+b_i\left(\tfrac{(J-p-q)^2}{\kappa^2}\right)G^\mu(J-p)G^\nu(p)\right]$$

$$-\sum_i P_i^{\lambda\kappa}(p-q)(\bar\sigma_\mu\sigma_\kappa)_{\sigma_2\alpha_2}(\bar\sigma_\nu^T\sigma_\lambda^T)_{\kappa_2\beta_2}\left[9I^0+I^1\right]_{\kappa_3\beta_3,\alpha_3\sigma_3}$$
$$\times\left[q_i\left(\tfrac{(p-q)^2}{\kappa^2}\right)\left(F^\mu(J-p)G^\nu(p)+G^\mu(J-p)F^\nu(p)\right)+b_i\left(\tfrac{(p-q)^2}{\kappa^2}\right)G^\mu(J-p)G^\nu(p)\right]\Bigg\}\times$$
$$\times\ \chi^{(FA)}\left(\begin{matrix}J-q & q\\ \alpha_2\alpha_3 & \beta_2\beta_3\end{matrix}\right)$$

Hier ist $K^F(J,p) := \frac{3}{8}\left[K^F(J-p)+K^F(p)\right]$, $\chi^{(K)}\left(\begin{matrix}J\\ \alpha,\beta\end{matrix}\right) := \int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\chi^{(K)}\left(\begin{matrix}J-q & q\\ \alpha & \beta\end{matrix}\right)$
Für $\chi^{(AA)}$ und $\chi^{(AF)}$ erhalten wir die entsprechenden konjugierten Gleichungen.

2 2.2. Ausreduktion nach der Isospingruppe

Die Darstellung der Isospinabhängigkeit der Amplituden $\chi^{(K)}$ gewinnen wir in analoger Weise wie oben. Seien $|\tfrac12 m_1\rangle_\alpha$, $|\tfrac12 m_2\rangle_\beta$ Zustände zum Isospin 1/2 und den Projektionen m_1 bzw. m_2. Dann folgt für $\chi^{(FF)}$:

$$|\tfrac12,\tfrac12;I,I_3\rangle_{\alpha\beta} = \sum_{m_1,m_2}\langle\tfrac12 m_1\,\tfrac12 m_2|I\,I_3\rangle\;|\tfrac12 m_1\rangle_\alpha\;|\tfrac12 m_2\rangle_\beta$$
$$= \langle\tfrac12\alpha\,\tfrac12\beta|I\,I_3\rangle \qquad (2.65)$$
$$= [I]^{1/2}$$
$$=: {}^{(FF)}\Gamma^{I\,I_3}_{\alpha\beta}$$

Und analog für $\chi^{(FA)}$.
Zusammenfassend verwenden wir folgende Darstellungen für die Isospinzustände:

${}^{(FF)}\Gamma^{I\,I_3}_{\alpha\beta} = [I]^{1/2}$, ${}^{(FA)}\Gamma^{I\,I_3}_{\alpha\beta} = [I]^{1/2}$, ${}^{(AF)}\Gamma^{I\,I_3}_{\alpha\beta} = [I]^{1/2}$ (2.66)

${}^{(AA)}\Gamma^{I\,I_3}_{\alpha\beta} = [I]^{1/2}$

Und für die Darstellungen der Amplituden folgt damit:

$$\chi^{(K)}\begin{pmatrix} J-p & p \\ \sigma_2\sigma_3 & \kappa_2\kappa_3 \end{pmatrix} = \sum_{I,I_3} \chi_I^{(K)}\begin{pmatrix} J-p & p \\ \sigma_2 & \kappa_2 \end{pmatrix} {}^{(K)}T_{\alpha\beta}^{II_3} \tag{2.67}$$

Da wieder gilt:

$${}^{(K)}T_{\alpha\beta}^{II_3}\ {}^{(K)}T_{\alpha\beta}^{I'I_3'*} = \delta_{II'}\delta_{I_3I_3'} \tag{2.68}$$

können wir die nach dem Isospin klassifizierten Gleichungen berechnen. Als Ergebnis erhält man folgende Gleichungen:

$$\left[1-K^F(J,p)\right]\chi_I^{(FF)}\begin{pmatrix} J-p & p \\ \sigma & \kappa \end{pmatrix} = \tag{2.69}$$

$$= \delta_{I,1}\frac{e^2}{4}\left[G^\mu(J-p)F^\nu(p)+G^\nu(p)F^\mu(J-p)\right](\bar\sigma_\mu C_\sigma \bar\sigma_\nu^T)_{\sigma\kappa}\, C^T_{\sigma,\alpha\beta}\,{}^1\chi_I^{(FF)}\begin{pmatrix} J \\ \alpha\beta \end{pmatrix}$$

$$+T_D(I)\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int d^4q \sum_i \Big\{\Big[2F^\mu(J-p)G^\nu(p)K_i^q(I;p-q)+G^\mu(J-p)G^\nu(p)K_i^b(I;p-q)\Big]\times$$

$$\times P_i^{\lambda\kappa}(p-q)(\bar\sigma_\mu\sigma_\kappa)_{\sigma\alpha}(\bar\sigma_\nu\sigma_\lambda)_{\kappa\beta}$$

$$-\Big[2G^\mu(J-p)F^\nu(p)K_i^q(I;J-p-q)+G^\mu(J-p)G^\nu(p)K_i^b(I;J-p-q)\Big]\times$$

$$\times P_i^{\lambda\kappa}(J-p-q)(\bar\sigma_\mu\sigma_\lambda)_{\sigma\beta}(\bar\sigma_\nu\sigma_\kappa)_{\kappa\alpha}\Big\}\chi_I^{(FF)}\begin{pmatrix} J-q & q \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$T_D(I) := \frac{[I]}{32}\sum_t \frac{1}{[t]}\begin{Bmatrix} 1/2 & 1/2 & t \\ 1/2 & 1/2 & I \end{Bmatrix}$$

$$\left[1-K^F(J,p)\right]\chi_I^{(FA)}\begin{pmatrix} J-p & p \\ \sigma & \kappa \end{pmatrix} = \tag{2.70}$$

$$= -\frac{3e^2}{8}\frac{1}{[I]}\left[G^\mu(J-p)F^\nu(p)+G^\nu(p)F^\mu(J-p)\right](\bar\sigma_\mu\sigma^\varepsilon\bar\sigma_\nu)_{\sigma\kappa}\,\sigma_{\varepsilon,\beta\alpha}\,{}^1\chi_I^{(FA)}\begin{pmatrix} J \\ \alpha\beta \end{pmatrix}$$

$$+\frac{e^2}{(2\pi)^4}\int d^4q\sum_i\Big\{2\Big[K_i^q(I,J-p-q)\Big(G^\mu(J-p)F^\nu(p)+F^\mu(J-p)G^\nu(p)\Big)+K_i^b(I;J-p-q)G^\mu(J-p)G^\nu(p)\Big]$$

$$\times T_M^{(1)}(I)\,P_i^{14}{}_\lambda(J-p-q)(\bar\sigma_\mu C_\sigma)_{\sigma\beta}(\bar\sigma_\nu^T C_\sigma)_{\kappa\alpha}$$

$$+\Big[K_i^q(I;p-q)\Big(G^\mu(J-p)F^\nu(p)+F^\mu(J-p)G^\nu(p)\Big)+K_i^b(I;p-q)G^\mu(J-p)G^\nu(p)\Big]$$

$$\times T_H^{(2)}(I)\,P_i^{\lambda\kappa}(p-q)(\bar\sigma_\mu\sigma_\kappa)_{\sigma\alpha}(\bar\sigma_\nu^T\sigma_\lambda^T)_{\kappa\beta}\Big\}\chi_I^{(FA)}\begin{pmatrix} J-q & q \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$T_M^{(1)}(I) := \frac{[I]}{48}\begin{Bmatrix} 1/2 & 1/2 & I \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{Bmatrix}, \qquad T_M^{(2)}(I) := \frac{[I]}{16}\sum_t \frac{(-)^t}{[t]}\begin{Bmatrix} 1/2 & 1/2 & I \\ 1/2 & 1/2 & t \end{Bmatrix}$$

Auch hier entkoppeln die Zustände zu verschiednen guten Quantenzahlen, wie es beabsichtigt war. Obige Gleichungen konnen als Grundlage einer Bosonentheorie dienen. Die beiden Nukleonenpole sind auf der rechten Seite additiv in den Kontraktionsfunktionen $F^{M}(p)$ und $F^{M}(\mathfrak{J}-p)$ enthalten, die bei $p^2 = \varkappa^2$ bzw. $(\mathfrak{J}-p)^2 = \varkappa^2$ Pole besitzen.

3. Drehimpulse in relativistischen Theorien

In der nichtlinearen Spinortheorie werden die Elementarteilchen darstellungstheoretisch eingeführt. Um daher aus den bislang abgeleiteten Gleichungen solche für Zustände zu gewinnen, die einem Elementarteilchen mit bestimmten Quantenzahlen von Baryonenzahl, Isospin und Spin, sowie bestimmter Masse entsprechen, ist daher noch eine relativistische Drehimpulsausreduktion notwendig.
In nichtrelativistischen Theorien kann eine Entwicklung nach Drehimpulszuständen einfach durch eine Entwicklung nach irreduziblen Darstellungen der Drehgruppe (Kugelflächenfunktionen) und eine anschließende Clebsch-Gordan-Zerlegung durchgeführt werden. In relativistischen Theorien ist dies wesentlich komplizierter, wie im folgenden dargelegt werden soll.
Aus der Forderung der relativistischen Symmetrie folgt unter der Annahme kommutativer Überauswahlregeln (Baryonenzahl, Statistik) die Existenz eines unitären oder antiunitären Operators $U(a,\Lambda)$, der bei einer inhomogenen Lorentztransformation $\{a,\Lambda\}$ kohärente Teilräume des physikalischen Hilbertraumes auf sich abbildet. (a bedeutet hier die Translation um den Vierervektor a, und Λ ein Element der Lorentzgruppe. Wir betrachten in diesem Abschnitt nur Transformationen der Menge $P_+^\uparrow := \{\{a,\Lambda\}, \Lambda \in L_+^\uparrow\}$, wo $L_+^\uparrow$ die eigentliche homogene orthochrone Lorentzgruppe ist. Die $\{a,\Lambda\}$ bilden die eigentliche orthochrone POINCARE-Gruppe. Der Grund für diese Einschränkung ist, daß wir nicht die paritätssymmetrische Form der Theorie (mit Spiegelungen) verwenden.)
Wenn das Transformationsgesetz $\{a,\Lambda\} \to U(a,\Lambda)$ eines physikalischen Zustandes unter $P_+^\uparrow$ irreduzibel ist, so nennen wir das zugehörige System ein Elementarsystem. Wenn wir nur irreduzible Darstellungen betrachten, so folgt im nichttrivialen Fall, daß jeder mit allen $U(a,\Lambda)$ vertauschbare Operator ein Vielfaches der Einheit sein muß (Schur'sches Lemma), was mit der Existenz eines maximal abelschen Satzes von Observablen eng zusammenhängt.
Bekanntlich lassen sich die Invarianten der Gruppe $P_+^\uparrow$ aus den infinitesimalen Erzeugenden der Translation P_μ und der Drehungen $M_{\varrho\sigma}$ in der $(\varrho-\sigma)$-Ebene aufbauen:

$$P_\mu P^\mu = M^2 \mathbb{1} \qquad \text{("Massenoperator")} \qquad (3.1)$$

$$\Gamma_\mu \Gamma^\mu = j(j+1)\cdot \mathbb{1} \qquad \text{("Spinoperator")} \qquad (3.2)$$

wo ist: $\Gamma_\mu := \frac{1}{2!M!}\, \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma} P_\nu M_{\varrho\sigma}$

Die invarianten Darstellungsräume irreduzibler Darstellungen werden dann durch die Werte der Masse M und des Spins j der physikalischen Zustände klassifiziert, welche die Darstellungsräume aufspannen. Ferner noch durch $\mathrm{sgn} P_0$ und $\mathrm{sgn}\, \Gamma_0$.
Die P_μ und $M_{\varrho\sigma}$ genügen den Vertauschungsrelationen:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\varrho] = i(g_{\nu\varrho} P_\mu - g_{\mu\varrho} P_\nu) \qquad (3.3)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\varrho\sigma}] = i(g_{\nu\varrho} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\varrho} M_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} M_{\nu\varrho} - g_{\nu\sigma} M_{\mu\varrho})$$

Wir nehmen an, daß alle stabilen Elementarteilchen Elementarsysteme sind, wenigstens in dem Sinne, daß wir die Effekte, die von Teilchen mit der Ruhmasse Null herrühren, vernachlässigen können. Wenn man nämlich annimmt, daß der Hilbertraum asymptotisch vollständig ist, so sollte jeder durch asymptotische Feldoperatoren und das Vakuum aufspannbare Zustand noch eine unbekannte Anzahl von ultraroten Lichtquanten enthalten, die unbeobachtbar sind [21]. Ein Teilchen aber, das an ein Feld der Masse Null gekoppelt ist, erhält einen "Anzug" von virtuellen Teilchen, welche sein Transformationsverhalten ändern. Es braucht folglich keine bestimmte Masse zu besitzen, sondern ist durch ein Wellenpaket in der Masse zu beschreiben, welches die Effekte der virtuellen Wolke beschreibt.
Wir betrachten zunächst ein System ohne Wechselwirkung, z.B. ein System von zwei Elementarteilchen oder -systemen, die sich nach den Darstellungen $[M_1, j_1]$ bzw. $[M_2, j_2]$ transformieren, wobei eine abgekürzte Schreibweise benutzt wurde. Bekanntlich kann man eine Beschreibung des Gesamtsystems durch Produktbildung gewinnen, was der Darstellung $[M_1, j_1] \otimes [M_2, j_2]$ entspricht. Wenn p_1 und p_2 die Viererimpulse der beiden Systeme sind, so kann $M^2 = (p_1 + p_2)^2$, die Masse des Gesamtsystems, die Werte von $M_1 + M_2$ bis Unendlich annehmen, wenn der Relativimpuls von Null bis Unendlich läuft. Im Schwerpunktsystem, d.h. für $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$, hängt der Zustand noch vom Relativimpuls ab, so daß bei Drehungen alle Bahndrehimpulse l vorkommen. Das bedeutet, daß das Gesamtsystem Teilsysteme $[M, ((j_1, l) s, j_2) j]$ enthält, wobei das Kopplungsscheme durch $((j_1, l) s, j_2) j$ festgelegt sei. Die Multiplizität mit der jede irreduzible Darstellung enthalten ist, muß nach dem Clebsch-Gordan-Theorem bestimmt werden.
Im folgenden werden die obigen Überlegungen genauer ausgeführt, wobei wir uns auf Darstellungen mit $M^2 > 0$ beschränken wollen.

Zunächst sind sechs Fälle möglich:

$$\begin{aligned} &a)\ P^2 = M^2 > 0, \quad P^0 \gtrless 0 \\ &b)\ P^2 = 0\ , \quad P^0 \gtrless 0 \\ &c)\ P^2 = -M^2 < 0 \\ &d)\ P = 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Die beiden ersten Fälle in a) entsprechen den Darstellungen, die wir oben mit $[M, j]$, $j=0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ bezeichnet haben, und den analogen Darstellungen mit nur anderem Energievorzeichen.
Für die beiden nächsten Fälle in b) haben wir Darstellungen des Typs $[0, j]$ mit $j=0, \pm 1/2, \pm 1, \ldots$ wo die Vorzeichen + oder - die Helizität des Systems und $|j|$ seinen Spin bedeutet. Z.B. gibt $[0, \pm 1/2]$ das Transformationsverhalten eines Neutrinos bzw. eines Antineutrinos mit den entsprechenden Helizitäten wieder, während $[0, \pm 1]$ die Darstellung für ein rechts- bzw. linkszirkular polarisiertes Photon ergibt. Für das entgegengesetzte Energievorzeichen ergeben sich die analogen Darstellungen. Es existieren noch andere Darstellungen mit der Masse Null, jedoch unendlichem Spin. Die noch verbleibenden haben entweder imaginäre Masse oder verschwindenden Viererimpuls. Die einzige von diesen Darstellungen, welche physikalisch sinnvoll ist, ist die triviale Darstellung, wo alle Lorentztransformationen durch den Einheitsoperator $\mathbb{1}$ in einem 1-dimensionalen Hilbertraum dargestellt werden. Sie beschreibt das Transformationsverhalten des Vakuums. [22]
In der Natur sind nicht alle Darstellungen (3.4) realisiert. Es existieren keine Zustände negativer Energie. Folglich gibt es für $M \geq 0$ keine irreduziblen Darstellungen mit negativer Energie oder imaginärer Masse in den Transformationsgesetzen der Elementarteilchen. Weiter existiert ein eindeutiger Zustand mit $P=0$. (Wir betrachten hier keine seltsamen Teilchen und nur starke Wechselwirkungen.) Daher ist die identische Darstellung, welche mit der Vielfachheit 1 auftritt, die einzige irreduzible Darstellung mit $P=0$. Schließlich gibt es irreduzible Darstellungen mit bestimmten Massen $[M_i, j_i]$, $i=1, 2, \ldots$ derart, daß alle Vielfachheiten anderer irreduzibler Darstellungen gleich jenen in einer Theorie freier Teilchen mit diesen Massen- und Spineigenwerten sind.

3. 1. Darstellungen der POINCARE-Gruppe
3. 1. 1. Kanonische Form der Darstellungen

Wir werden von nun an stets nur unitäre Darstellungen $U(a,\Lambda)$ betrachten, und die antiunitären ausschließen. Man sieht den Grund sofort ein, wenn man berücksichtigt, daß das Quadrat eines antiunitären Operators unitär ist, und jede Translation oder eingeschränkte Lorentztransformation als Quadrat geschrieben werden kann. Ferner betrachten wir nur Darstellungen mit $M^2 > 0$.
Bei der Konstruktion der Darstellungen ist es nach JOOS [23] zweckmäßig, sich auf eine eindeutige Basis von Eigenvektoren der infinitesimalen Darstellungsoperatoren zu beziehen, die wir kanonische Basis nennen. Daneben werden später noch nichtorthogonale Basissysteme betrachtet, sog. Spinorbasen, die sich ein-eindeutig auf die kanonischen Basen abbilden lassen, und sich durch ein einfacheres (lokales) Transformationsverhalten auszeichnen.
Wegen $[P_\mu, P_\nu] = 0$ können die Komponenten des Vierimpulses gleichzeitig diagonalisiert werden, und wir können im Hilbertraum eine Basis von Eigenvektoren der P_μ wählen:

$$P_\mu \, |\varepsilon, M, j\rangle_{p,\xi} = p_\mu \, |\varepsilon, M, j\rangle_{p,\xi} \tag{3.5}$$

Dabei ist ε das Energievorzeichen und ξ ein noch unbestimmter Entartungsparameter. $p = (p_\mu) = (\varepsilon\sqrt{M^2+\vec{p}^2}, \vec{p})$ durchläuft die Punkte der gegenüber orthochronen Lorentztransformationen invarianten Massenschale. ε, M, j sind die Invarianten der Darstellung. P und ξ haben wir als Indizes der Basisvektoren (3.5) geschrieben, um deutlich zu machen, daß sie die zu einer Darstellung mit den obigen Werten der Invarianten gehörenden Basisvektoren kennzeichnen.
Für das weitere ist es nützlich, mit L(p) eine drehungsfreie Lorentztransformation zu bezeichnen, welche den Vierervektor p in das Ruhesystem transformiert:

$$L(p)\,p = p_R := (\varepsilon M, \vec{0}) \tag{3.6}$$

Dabei heißt eine Lorentztransformation drehungsfrei, wenn ein Bezugssystem existiert, in welchem sie die Form

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \cosh\alpha \cdot x^0 + \sinh\alpha \cdot x^1 \\ x^{1'} &= \sinh\alpha \cdot x^0 + \cosh\alpha \cdot x^1 \\ x^{2'} &= x^2 \\ x^{3'} &= x^3 \end{aligned} \tag{3.7}$$

besitzt.

Sei U(L(p)) der Darstellungsoperator von L(p) in $\mathfrak{H}$. Dann können wir eine Basis von Eigenvektoren zu beliebigem Viererimpuls aus den Eigenvektoren zu p_R aufbauen:

$$|\varepsilon, M, j\rangle_{p,\xi} = U(L^{-1}(p))\,|\varepsilon, M, j\rangle_{p_R,\xi} \tag{3.8}$$

Sei nämlich $\Pi \in P_+^{\uparrow}$. Dann ist zunächst

$$U^{-1}(\Pi)\, P_\mu\, U(\Pi) = \Pi_\mu^{\ \nu}\, P_\nu \tag{3.9}$$

nach dem allgemeinen Transformationsgesetz für Operatoren bei unitären Transformationen. ($\Pi_\mu^{\ \nu}$ ist die Darstellungsmatrix der Lorentztransformation Π im Lorentzraum.) Und weiter folgt:

$$\begin{aligned} P_\mu\, U(L^{-1}(p))\,|\varepsilon, M, j\rangle_{p_R,\xi} &= U(L^{-1}(p))\, L_\mu^{-1\,\nu}(p)\, P_\nu\, |\varepsilon, M, j\rangle_{p_R,\xi} \\ &= U(L^{-1}(p))\, L_\mu^{-1\,\nu}(p)\, (p_R)_\nu\, |\varepsilon, M, j\rangle_{p_R,\xi} \\ &= P_\mu\, U(L^{-1}(p))\,|\varepsilon, M, j\rangle_{p_R,\xi} \\ &= P_\mu\, |\varepsilon, M, j\rangle_{p,\xi} \end{aligned} \tag{3.10}$$

Durch (3.10) ist auch der Entartungsparameter ξ für beliebiges p durch den für p_R festgelegt.
Die Vektoren $|\varepsilon, M, j\rangle_{p_R,\xi}$ werden durch die 3-dimensionalen Drehungen in sich transformiert. Sei $R \in O_3$, dann folgt aus der Darstellungsrelation:

$$\vec{P}\, U(R)\,|\varepsilon, M, j\rangle_{p_R,\xi} = U(R)\,(R\vec{P})\,|\varepsilon, M, j\rangle_{p_R,\xi} = 0 \tag{3.11}$$

Und damit:

$$U(R)\,|\varepsilon, M, j\rangle_{p_R,\xi} = \sum_{\xi'} |\varepsilon, M, j\rangle_{p_R,\xi'}\, D^{j}_{\xi'\xi}(R) \tag{3.12}$$

Von WIGNER wurde der Begriff der kleinen Gruppe ("little group") eingeführt. Sie besteht aus allen homogenen Lorentztransformationen, welche den Zustandsraum zu einem vorgegebenen festen Viererimpuls invariant lassen. Im Falle $p=p_R$ ist das nach (3.11, 12) die Gruppe O_3 der räumlichen Drehungen. Die Matrizen $D^{j}_{\xi\xi'}(R)$ sind die bekannten Darstellungsmatrizen der Gruppe SU(2, C), welche die einfach zusammenhängende Überlagerungsgruppe der Gruppe O_3 ist. Sie können für beliebiges j mit Hilfe der JACOBIschen Polynome [24] angegeben werden.

Nach WIGNER läßt sich ferner eine beliebige Transformation $\Lambda \in P_+^\uparrow$ aus zwei Transformationen des Typs L(p), $L^{-1}(p)$, und einer räumlichen Drehung $R(\Lambda, p)$, der sog. WIGNER-Rotation zusammensetzen

$$\Lambda = L^{-1}(\Lambda p)\, R(\Lambda, p)\, L(p) \tag{3.13}$$

oder:

$$R(\Lambda, p) = L(\Lambda p)\, \Lambda\, L^{-1}(p) \tag{3.14}$$

woraus sofort mittels (3.6) folgt:

$$R(\Lambda, p)\, P_R = P_R \tag{3.15}$$

so daß $R(\Lambda, p)$ ein Element der zur p_R gehörigen kleinen Gruppe ist, d.h. eine Drehung.
Mit der Zerlegung (3.13) können wir nun unter Verwendung der Darstellungsrelation das Transformationsverhalten der Basis (3.5) leicht angeben:

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\,|\varepsilon, M, j\rangle_{p, j_3} &= U(L^{-1}(\Lambda p))\, U(R(\Lambda, p))\, U(L(p))\,|\varepsilon, M, j\rangle_{p, j_3} \\ &= U(L^{-1}(\Lambda p))\, U(R(\Lambda, p))\,|\varepsilon, M, j\rangle_{P_R, j_3} \\ &= U(L^{-1}(\Lambda p)) \sum_{j_3'} |\varepsilon, M, j\rangle_{P_R, j_3'}\, D^{j}_{j_3' j_3}(R(\Lambda, p)) \\ &= \sum_{j_3'} |\varepsilon, M, j\rangle_{\Lambda p, j_3'}\, D^{j}_{j_3' j_3}(R(\Lambda, p)) \end{aligned} \tag{3.16}$$

Um aus (3.16) auf eine irreduzible Darstellung der $P_+^\uparrow$ zu schließen, muß notwendigerweise auch die Darstellung $D^{j}_{j_3' j_3}(R)$ der Drehgruppe irreduzibel sein. Daß bei Verwendung einer irreduziblen Darstellung der Drehgruppe die entstehende Darstellung der $P_+^\uparrow$ ebenfalls irreduzibel ist, d.h. daß es in $\mathfrak{H}_j$ keinen echten, invarianten Teilraum gibt, folgt aus der Tatsache, daß es auf der Massenschale keine gegenüber Lorentztransformationen invariante echte Teilmenge gibt. [22], [25] . Wenn man für diese irreduzible Darstellung der Drehgruppe eine kanonische Basis wählt, so ist damit eine explizite Konstruktion der allgemeinen irreduziblen Darstellung der $P_+^\uparrow$ mit $M^2 > 0$ durchgeführt.
Die kanonische Basis wird damit zusammenfassend durch die Relationen (3.5, 8) und zusätzlich durch

$$\begin{aligned} \Gamma_\mu \Gamma^\mu\,|\varepsilon, M, j\rangle_{P_R, j_3} &= j(j+1)\,|\varepsilon, M, j\rangle_{P_R, j_3} \\ j &= 0, 1/2, 1, \ldots \end{aligned} \tag{3.17}$$

und

$$J_3 \,|\varepsilon, M, j\rangle_{p,j_3} = j_3 \,|\varepsilon, M, j\rangle_{p,j_3} \tag{3.18}$$

festgelegt, wobei die 3 Komponenten des Spins üblicherweise durch

$$J_\tau = \varepsilon\, L_\tau^{\ \nu}(p)\, \Gamma_\nu \,, \quad \tau = 1,2,3$$

eingeführt wurden. Die Basisvektoren genügen der Orthogonalitätsrelation:

$$\langle \varepsilon, M, j \,|\, \varepsilon, M, j\rangle_{p,j_3;p',j_3'} = 2\,|p^0|\,\delta^{(3)}(\vec{p}-\vec{p}')\,\delta_{j_3 j_3'} \tag{3.19}$$

Wenn wir eine beliebige Transformation $\{a,\Lambda\}$ aus $P_+^\uparrow$, mit $\Lambda \in L_+^\uparrow$ als semidirektes Produkt $U(a,\Lambda)=U(a)U(\Lambda)$ schreiben, dann transformieren sich die Basisvektoren schließlich gemäß:

$$U(a)\,|\varepsilon, M, j\rangle_{p,j_3} = e^{ip_\mu a^\mu}\,|\varepsilon, M, j\rangle_{p,j_3} \tag{3.20}$$

$$U(\Lambda)\,|\varepsilon, M, j\rangle_{p,j_3} = \sum_{j_3'} |\varepsilon, M, j\rangle_{\Lambda p, j_3'}\, D^{j}_{j_3' j_3}(R(\Lambda,p)) \tag{3.21}$$

Wenn wir den freien 1-Teilchenzustand mit Masse M, Spin j und Spinprojektion j_3 durch einen freien Feldoperator $\Phi^{j*}_{j_3}(\varepsilon,M|p)$ erzeugen, dann folgt aus (3.16) für das Transformationsgesetz:

$$U(\Lambda)\,\Phi^{j}_{j_3}(\varepsilon,M|p)\,U^{-1}(\Lambda) = \sum_{j_3'} D^{j}_{j_3 j_3'}(R(\Lambda,p))\,\Phi^{j}_{j_3'}(\varepsilon,M|\Lambda p)\,, \quad \Lambda \in P_+^\uparrow \tag{3.22}$$

Wegen der Impulsabhängigkeit der Transformationsmatrix, die im allgemeinen eine relativ komplizierte Gestalt besitzt [23], kann ein solches freies Feld nicht zur Definition von Operatoren benutzt werden, die lokalen Vertauschungsrelationen genügen sollen, weil aus (3.22) folgt, daß die Transformation im Ortsraum nichtlokal ist. Wie bereits oben erwähnt wurde, läßt sich dieser Umstand beheben, wenn man zu nichtorthonormalen Spinorbasen übergeht.

3.1.2. Spinordarstellungen

Durch die Transformation

$$\Psi^{j}_{\alpha}(\varepsilon,M|p) := \sum_{j_3} D^{j}_{\alpha j_3}(L^{-1}(p))\,\Phi^{j}_{j_3}(\varepsilon,M|p) \tag{3.23}$$

können wir zu Spinoroperatoren $\Psi^{j}_{\alpha}(\varepsilon,M|p)$ übergehen. Dabei ist $D^{j}_{\alpha j_3}(L^{-1}(p))$ die Darstellungsmatrix einer Darstellung der Gruppe SL(2, C), welche die Überlagerungsgruppe von $L^{\uparrow}_{+}$ ist. (Durch Einschränkung von SL(2, C) auf SU(2, C) $\subset$ SL(2, C) erhält man daraus wieder die Darstellungen der O_3.) Für $\Lambda \in P^{\uparrow}_{+}$ folgt für das Transformationsverhalten aus (3.16) und (3.23):

$$U(\Lambda)\,\Psi^{j}_{\alpha}(\varepsilon,M|p)\,U^{-1}(\Lambda) = \sum_{\alpha'} D^{j}_{\alpha\alpha'}(\Lambda^{-1})\,\Psi^{j}_{\alpha'}(\varepsilon,M|\Lambda p) \tag{3.23}$$

Durch Einsetzen läßt sich diese Beziehung sofort verifizieren:

$$\begin{aligned}
U(\Lambda)\Psi^{j}_{\alpha}(\varepsilon,M|p)U^{-1}(\Lambda) &= U(\Lambda)\Big[\sum_{j_3} D^{j}_{\alpha j_3}(L^{-1}(p))\,\Phi^{j}_{j_3}(\varepsilon,M|p)\Big]U^{-1}(\Lambda)\\
&= \sum_{j_3 j_3'} D^{j}_{\alpha j_3}(L^{-1}(p))\,D^{j}_{j_3 j_3'}(R^{-1}(\Lambda,p))\;\Phi^{j}_{j_3'}(\varepsilon,M|\Lambda p)\\
&= \sum_{j_3 j_3'} D^{j}_{\alpha j_3}(L^{-1}(p))\,D^{j}_{j_3 j_3'}\big(L(p)\Lambda^{-1}L^{-1}(\Lambda p)\big)\,\Phi^{j}_{j_3'}(\varepsilon,M|\Lambda p)\\
&= \sum_{\alpha' j_3'} D^{j}_{\alpha\alpha'}(\Lambda^{-1})\,\big[D^{j}_{\alpha' j_3'}(L^{-1}(\Lambda p))\,\Phi^{j}_{j_3'}(\varepsilon,M|\Lambda p)\big]\\
&= \sum_{\alpha'} D^{j}_{\alpha\alpha'}(\Lambda^{-1})\,\Psi^{j}_{\alpha'}(\varepsilon,M|\Lambda p)
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Im Ortsraum erhält man aus (3.24) Feldoperatoren, die sich lokal unter den Transformationen der Gruppe $P^{\uparrow}_{+}$ transformieren. Jedoch ist das nicht hinreichend, um Felder mit lokalen Vertauschungsrelationen zu konstruieren. [26]
Zur Bezeichnungsweise sei noch vermerkt, daß in (3.23-24) Spinorindizes α und sphärische Indizes j_3 benutzt wurden, um auf den Unterschied der Darstellungen hinzuweisen.

3.2. Ausreduktion von Produktdarstellungen der $P^{\uparrow}_{+}$

Für die relativistische Kinematik von besonderer Bedeutung ist das Problem der Ausreduktion des direkten Produktes irreduzibler Darstellungen der inhomogenen Lorentzgruppe, da Systeme aus kinematisch unabhängigen relativistischen Teilchen durch direkte Produkte irreduzibler Darstellungen beschrieben werden.
Wir interessieren uns hier für die Drehimpulsausreduktion von Matrixelementen von Produkten lokaler wechselwirkender Feldoperatoren. Wie oben gezeigt wurde, genügen freie Feldoperatoren den analogen

Transformationsgesetzen wie die entsprechenden 1-Teilchenzustände [23, 27]. Daher können die folgenden Betrachtungen unmittelbar für Matrixelemente von Feldoperatoren übernommen werden.

3.2.1. Freie Felder

Wir betrachten zunächst die Produktdarstellung zweier irreduzibler Darstellung der $P_+^\uparrow$ mit $M^2>0, P^0>0$, wobei zwei irreduzible Darstellungen $U'(a,\Lambda)$ und $U''(a,\Lambda)$ mit den Invarianten $\varepsilon'=1, M'^2>0, j'$ bzw. $\varepsilon''=1, M''^2>0, j''$ und den Darstellungsräumen $\mathfrak{H}'$ bzw. $\mathfrak{H}''$ vorgegeben seien. Im Produktraum $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}'\otimes\mathfrak{H}''$ bilden die direkten Produkte $|\varepsilon',M',j'\rangle_{p',j_3'}\otimes|\varepsilon'',M'',j''\rangle_{p'',j_3''}$ eine Basis. Folglich hat ein allgemeiner Zustand in $\mathfrak{H}$ die Form

$$|\Phi\rangle=\sum_{j_3'j_3''}\int\frac{d^3\vec{p}'\,d^3\vec{p}''}{2|p_0'|\,2|p_0''|}\,\langle p',j_3';p'',j_3''|\Phi\rangle\,|M',j'\rangle_{p',j_3'}\otimes|M'',j''\rangle_{p'',j_3''} \tag{3.25}$$

$$|\varepsilon,M,j\rangle\equiv|M,j\rangle$$

wobei die Entwicklungskoeffizienten $\langle p',j_3';p'',j_3''|\Phi\rangle$ auf den Massenschalen und für die erlaubten Spinprojektionen j_3', j_3'' definiert sind, d.h. für

$$p_0'>0,\ p'^2=M'^2>0,\quad -j'\le j_3'\le j \qquad \text{bzw. } p_0''>0,\ p''^2=M''^2>0,\quad -j''\le j_3''\le j'' \tag{3.26}$$

In $\mathfrak{H}$ ist eine unitäre Darstellung $U(a,\Lambda)$ durch

$$U(a,\Lambda)|\Phi\rangle=\sum_{j_3'j_3''}\int\frac{d^3\vec{p}'\,d^3\vec{p}''}{2|p_0'|\,2|p_0''|}\,\langle p',j_3';p'',j_3''|\Phi\rangle\left[U'(a,\Lambda)|M',j'\rangle_{p',j_3'}\otimes U''(a,\Lambda)|M'',j''\rangle_{p'',j_3''}\right] \tag{3.27}$$

gegeben, und $U(a,\Lambda)$ wird als direktes Produkt

$$U(a,\Lambda):=U'(a,\Lambda)\otimes U''(a,\Lambda) \tag{3.28}$$

definiert. Wie im Fall der Gruppe O_3 können wir die Clebsch-Gordan-Koeffizienten dadurch einführen, daß wir sie als die Koeffizienten der unitären Transformationen von der Produktbasis auf eine neue Basis definieren, in der die Produktdarstellung (3.28) zerfällt:

$$|M,j;\eta\rangle_{p,j_3}=\sum_{j_3'j_3''}\int\frac{d^3\vec{p}'\,d^3\vec{p}''}{2|p_0'|\,2|p_0''|}\left(\begin{matrix}M',j';M'',j''\\p',j_3';p'',j_3''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}M,j\\p,j_3\end{matrix}\,\eta\right)|M',j'\rangle_{p',j_3'}\otimes|M'',j''\rangle_{p'',j_3''} \tag{3.29}$$

Im allgemeinen treten bei der Ausreduktion von Produktdarstellungen irreduzible Darstellungen mehrfach auf. Diese unterscheiden wir durch den Parameter η .
Die in (3.29) vorkommenden Koeffizienten sind die Clebsch-Gordan-Koeffizienten der Gruppe $P_+^{\uparrow}$. Natürlich hängen die neuen Basisvektoren vom Kopplungsschema ab. Wir wählen es als $[(j',j'')r,l]j$, d.h. wir koppeln zuerst die beiden Spins j' und j'' der beiden 1-Teilchenzustände im gemeinsamen Ruhesystem zu einem "Kanalspin" r zusammen, und dann r mit dem relativen Bahndrehimpuls l zum Gesamtspin j. Beim Zusammensetzen von drei Drehimpulsen kommt im allgemeinen der gleiche Drehimpulseigenwert mehrfach vor.
Aus diesem Grund kommen auch in der Produktdarstellung irreduzible Darstellungen mit gleicher Masse und gleichem Spin mehrfach vor.
Wir wählen daher als unterscheidende Entartungsparameter η den relativen Bahndrehimpuls l und den Kanalspin r. Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten wurden von JOOS in [23] berechnet. Für die Einzelheiten der Rechnung sei daher darauf verwiesen. Wir geben hier nur das Ergebnis an. Bis auf einen Phasenfaktor (bei JOOS i^1) erhält man:

$$\left(r, l \; \begin{matrix} j, M \\ j_3, p \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j', M' ; \; j'', M'' \\ j'_3, p' ; \; j''_3, p'' \end{matrix} \right) =$$

$$= 2^{5/2} \frac{M}{\sqrt{K}} \Theta(M - M' - M'') \, \delta^{(3)}(\vec{p}' + \vec{p}'' - \vec{p}) \, \delta\left((p' + p'')^2 - M^2 \right) \tag{3.30}$$
$$\times \sum_{\substack{\bar{j}'_3 \bar{j}''_3 \\ r_3 l_3}} D^{j'}_{j'_3 \bar{j}'_3} \left(R^{-1}(L(p), p') \right) D^{j''}_{j''_3 \bar{j}''_3} \left(R^{-1}(L(p), p'') \right) \langle j' \bar{j}'_3 j'' \bar{j}''_3 | r r_3 \rangle \times$$
$$\times \langle l l_3 r r_3 | j j_3 \rangle \, Y^{l_3}_{l}(\vec{e})$$

Hier ist Θ die übliche Stufenfunktion. Ferner bedeutet:

$$\vec{e} := \frac{1}{K} \left[\vec{p}' - \frac{(M^2 + M'^2 - M''^2 + 2M p'_0)}{2M(M + p_0)} \vec{p} \right]$$

$$K := \frac{1}{2M} \left[\left(M^2 - (M'^2 + M''^2) \right) \left(M^2 - (M' - M'')^2 \right) \right]^{1/2}$$

und: $(M' + M'')^2 \le M^2 < \infty \quad , \quad p_0 = p'_0 + p''_0 > 0$

$$j = \begin{cases} 0, 1, 2, \dots & \\ 1/2, 3/2 \dots & \end{cases} \text{für} \quad \begin{matrix} j' + j'' \text{ ganz} \\ j' + j'' \text{ halbzahlig} \end{matrix} \qquad \eta = \begin{cases} r \\ l \end{cases} \text{mit} \quad \begin{matrix} |j' - j''| \le r \le j' + j'' \\ |r - j| \le l \le r + j \end{matrix}$$

Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten genügen Unitaritäts- und Vollständigkeitsrelationen, mittels deren man die Entwicklung (3.29) umkehren kann:

$$|M',j'\rangle_{P,j_3'} \otimes |M'',j''\rangle_{P,j_3''} = \int dM \int \frac{d^3\vec{p}}{2|p_0|} \sum_{\substack{\tau\tau_3 \ell\ell_3 \\ j j_3}} \left(\tau,\ell \;\middle|\; \begin{matrix} j_3, M \\ j_3, p \end{matrix} \middle| \begin{matrix} j', M'; j'', M'' \\ j_3', p'; j_3'', p'' \end{matrix} \right) |M,j\rangle_{P,j_3} \tag{3.31}$$

Oder explizit:

$$|M',j'\rangle_{P,j_3'} \otimes |M'',j''\rangle_{P,j_3''} = \left(\frac{2}{K}\right)^{1/2} \sum_{\substack{j_3' j_3'' \tau\tau_3 \\ \ell\ell_3 j j_3}} D^{j'}_{j_3' j_3}(R^{-1}(L(p),p')) \, D^{j''}_{j_3'' j_3}(R^{-1}(L(p),p'')) \tag{3.32}$$

$$\times \langle j' j_3' j'' j_3'' | \tau\tau_3 \rangle \langle \tau\tau_3 \ell\ell_3 | j j_3 \rangle \, Y_\ell^{\ell_3}(\vec{e}) \, |M,j;M',j';M'',j'';\tau,\ell\rangle_{P,j_3}$$

wobei wir die Abhängigkeit der neuen Basisvektoren vom Kopplungsschema gekennzeichnet haben.
(3.31) gilt in beliebigen Inertialsystemen, also speziell auch im Schwerpunktsystem der beiden 1-Teilchenzustände oder Elementarsysteme, wo die Verhältnisse besonders einfach liegen, weil in diesem System durch den Relativimpuls die einzige unabhängige Impulsrichtung gegeben ist. Es ist $p_R = (M, \vec{0})$ und $\vec{p}_R' = -\vec{p}_R'' = \vec{k}$, oder, wenn man die Definition von L(p) berücksichtigt:

$$p_R' = L(p)\,p' \quad , \qquad p_R'' = L(p)\,p'' \tag{3.33}$$

Die einzige unabhängige Impulsrichtung ist dann $\vec{k}$, wobei ist:

$$k^\mu = \left(\frac{M'^2 - M''^2}{M}, \vec{k}\right) = \tfrac{1}{2} L(p)\,(p'^\mu - p''^\mu) = K e^\mu$$

$$e^\mu := \frac{1}{2K} L^\mu{}_\nu(p)\,(p'^\nu - p''^\nu) \tag{3.34}$$

$$|\vec{k}| = K \, , \quad \vec{k} := \frac{1}{K}\vec{k}$$

Da L(p) die Identität ist, wenn p' und p'' von vorneherein im Schwerpunktsystem definiert sind, ergibt sich aus (3.32):

$$|M',j'\rangle_{P_R,j_3'} \otimes |M'',j''\rangle_{P_R,j_3''} =$$

$$= \left(\frac{2}{K}\right)^{1/2} \sum_{\substack{\tau\tau_3 \ell\ell_3 \\ j j_3}} \langle j' j_3' j'' j_3'' | \tau\tau_3 \rangle \langle \tau\tau_3 \ell\ell_3 | j j_3 \rangle \, Y_\ell^{\ell_3}(\vec{k}) \, |M,j,M',j',M'',j'',\tau,\ell\rangle_{P_R,j_3} \tag{3.35}$$

Analog zu dem angegebenen Verfahren für kanonische Basen können auch spinorielle Produktdarstellungen ausreduziert werden. Mit (3.23) und (3.35) folgt im Schwerpunktsystem

$$|M',j'\rangle_{p'_R,\alpha'} \otimes |M'',j''\rangle_{p''_R,\alpha''} =$$
$$= \left(\frac{2}{\kappa}\right)^{1/2} \sum_{\substack{\tau\tau_3 \ell\ell_3 \\ j\alpha j'_3 j''_3}} D^{j'}_{\alpha' j'_3}\left(L^{-1}(p'_R)\right) D^{j''}_{\alpha'' j''_3}\left(L^{-1}(p''_R)\right) \langle j' j'_3 j'' j''_3 | \tau\tau_3\rangle \langle \tau\tau_3 \ell\ell_3 | j\alpha\rangle \qquad (3.36)$$
$$\times\, Y^{\ell_3}_{\ell}(\vec{k})\, |M, j; M', j'; M'', j''; \tau, \ell\rangle_{p_R,\alpha}$$

Und nach Anwendung von $\Lambda = L^{-1}(p)$ auf beide Seiten ergibt sich in einem beliebigen Inertialsystem:

$$|M',j'\rangle_{p',\alpha'} \otimes |M'',j''\rangle_{p'',\alpha''} =$$
$$= \left(\frac{2}{\kappa}\right)^{1/2} \sum_{\substack{\tau\tau_3 \ell\ell_3 j\alpha \\ j'_3 j''_3 \bar{\alpha}}} D^{j'}_{\alpha' j'_3}\left(L^{-1}(p) L^{-1}(L(p)p')\right) \underset{\sim}{D}{}^{j''}_{j''_3}\left(L^{-1}(p) L^{-1}(L(p)p'')\right) D^{j}_{\bar{\alpha}\alpha}(L(p)) \qquad (3.37)$$
$$\langle j' j'_3 j'' j''_3 | \tau\tau_3\rangle \langle \tau\tau_3 \ell\ell_3 | j\alpha\rangle\, Y^{\ell_3}_{\ell}(\vec{k})\, |M, j; M', j'; M'', j''; \tau, \ell\rangle_{p,\alpha}$$

Damit ist das Problem für freie Felder gelöst. Bei Feldern mit Wechselwirkung treten bei der Interpretation der obigen Gleichungen einige zusätzliche Aspekte auf, die gesondert betrachtet werden müssen.

3.2.2. Wechselwirkende Felder

Die obige Behandlung des Problems der Ausreduktion von Produktdarstellungen gilt zunächst, wie schon erwähnt, nur für freie Felder, die auf der Massenschale $p^2 = M^2 > 0$ definiert sind, und sie können wegen der Beiträge von abseits der Massenschale nicht ohne weiteres auf wechselwirkende Felder übertragen werden. Für virtuelle Zustände mit raumartigem Viererimpuls $p^2 < 0$ ändert sich z.B. die Darstellung, resp. ihr Charakter, und für $p^2 = 0$ ist L(p) überhaupt sinnlos, wenn man Zustände endlicher reeller Masse betrachtet. Man kann jedoch die für freie Felder entwickelten Methoden auch auf Felder mit Wechselwirkung übertragen, wenn man nur Matrixelemente von wechselwirkenden Feldoperatoren zwischen "realen" physikalischen Zuständen untersucht, die ja wiederum auf der Massenschale liegen. Allerdings ist dazu eine Neuinterpretation der bisher als Drehimpulse gedeuteten Entartungsparameter notwendig [20]. Spins werden in relativistischen Theorien stets im mitbewegten Koordinatensystem definiert, und ein solches braucht für virtuelle Zustände nicht zu existieren.

Für die Drehimpulsausreduktion der abgeleiteten Baryonen- und Bosonengleichungen benötigen wir eine Drehimpulszerlegung der Matrixelemente von lokalen Feldoperatoren $\Psi^{j'}_{\alpha'}(x')$ und $\Psi^{j''}_{\alpha''}(x'')$ zwischen dem Vakuum und einem physikalischen Zustand mit der Masse M, dem Vierimpuls p und dem Spin j, d.h. $\langle 0|\Psi^{j'}_{\alpha'}(x')\Psi^{j''}_{\alpha''}(x'')|M,j\rangle_{p,j_3}$. Wir entwickeln diese Matrixelemente nach Darstellungen der Translationsgruppe:

$$\langle 0|\Psi^{j'}_{\alpha'}(x')\Psi^{j''}_{\alpha''}(x'')|M,j\rangle_{p,j_3} = \int\frac{d^4p'}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4p''}{(2\pi)^4}e^{-i(p'x'+p''x'')}\langle 0|\tilde{\Psi}^{j'}_{\alpha'}(p')\Psi^{j''}_{\alpha''}(p'')|M,j\rangle_{p,j_3} \quad (3.38)$$

Wegen der Translationssymmetrie des physikalischen Zustandes tragen nur Fourierkomponenten mit $p'+p''=p$ bei. Im Gegensatz zu den freien Operatoren sind die Operatoren $\tilde{\Psi}^{j}_{\alpha}(p)$ nicht nur auf der Massenschale definiert. p'^2 (p''^2) sind in (3.38) Integrationsvariable. Für $p'^2>0$ ($p''^2>0$) können die Spins j' (j'') wie im freien Fall in den entsprechenden Ruhesystemen $\vec{p}'=0$ ($\vec{p}''=0$) definiert werden. Solche Ruhesysteme existieren jedoch nicht für Integrationsgebiete mit $p'^2\leq 0$ ($p''^2\leq 0$). Andererseits existiert jedoch das Schwerpunktsystem $\vec{p}=0$ stets, da es zu einem realen physikalischen Zustand gehört. Wenn man also die unmittelbare physikalische Interpretation der j' und j'' als Spins aufgibt, und sich darauf beschränkt, sie als Indizes zu betrachten, die es erlauben, die verschiedenen Basisvektoren zu unterscheiden, und sie daher nur die Rolle von Entartungsparametern spielen, so erhält die Drehimpulsausreduktion von (3.38) formal die nämliche Gestalt wie die Zerlegung von Produktdarstellungen der Operatoren $\Phi^{j}_{j_3}(M|p)$ bzw. der zugehörigen 1-Teilchenzustände (3.35). Die Operatoren $\tilde{\Psi}^{j}_{\alpha}(p)$ werden dabei anstelle in ihren eigenen Ruhesystemen, die nicht notwendig zu existieren brauchen, im Gesamtruhesystem $\vec{p}=0$ des physikalischen Zustandes in ihre irreduziblen Anteile bezüglich der Drehgruppe zerlegt. Dabei ist natürlich stets die andere Bedeutung der Spins j' (j'') und ihrer Projektionen, die wir wieder mit j_3 bezeichnen anstatt mit α, im Auge zu behalten. Der Gesamtspin j, der ja zu einem physikalischen Zustand gehört, ist selbstverständlich in der üblichen Weise zu verstehen, lediglich die Zwischenzustände, die ja virtuell sein können, werden von dieser Uminterpretation betroffen.
Aus (3.35) erhalten wir dann formal im Schwerpunktsystem:

$$\langle 0|\tilde{\Psi}^{j'}_{j'_3}(p'_R)\,\tilde{\Psi}^{j''}_{j''_3}(p''_R)|M,j\rangle_{p,j_3} =$$

$$= \delta^{(4)}(p'+p''-p)\sum_{\substack{\ell\ell_3\\ \tau\tau_3}}\langle j'j'_3j''j''_3|\tau\tau_3\rangle\langle\tau\tau_3\ell\ell_3|jj_3\rangle\,\psi^{j}_{j_3}(M,p_R,p'^2,j',p''^2,j'',\tau,\ell)\,Y^{\ell_3}_{\ell}(\hat{k}) \quad (3.39)$$

Und nach Anwendung von $L(p)$ in einem beliebigen Inertialsystem:

$$\langle 0|\hat{\Psi}^{j'}_{j'_3}(p')\tilde{\Psi}^{\bar{j}''}_{j''_3}(p'')|M,j\rangle_{p,j_3} = \delta^{(4)}(p'+p''-p)\sum_{\substack{\ell\ell_3\\ \tau\tau_3}} D^{\tau}_{\tau_3\bar{\tau}_3}(L^{-1}(p))\langle j'j'_3 j''\bar{j}''_3|\tau\tau_3\rangle\langle\tau\bar{\tau}_3\ell\ell_3|j j_3\rangle$$
$$\times Y^{\ell_3}_{\ell}(\vec{k})\,\Psi^{j}_{j_3}(M,p;p'^2,j';p''^2,j'';\tau,\ell) \qquad (3.40)$$

In (3.39) und (3.40) wurde die Erhaltung des Viererimpulses durch eine Deltafunktion explizit herausgezogen.
Für die weiteren Rechnungen verwenden wir stets die Form (3.39). Bei der Herleitung von (3.39,40) ist keine Kopplung zwischen zeitartigen und raumartigen Komponenten der Viererimpulse angenommen worden. Daher bleiben die Darstellungen auch für Matrixelemente von relativistisch invariant geordneten Produkten von Feldoperatoren gültig. Wir können folglich die Darstellungen für die Amplituden der Baryonen- und Bosonengleichungen sofort angeben.

4. Spin-Ausreduktion relativistischer Mehrteilchengleichungen

Nachdem im 3. Abschnitt die allgemeinen Grundlagen einer Drehimpulszerlegung von relativistischen Mehrteilchenamplituden angegeben wurden, werden die dargelegten Prinzipien dazu verwendet, die speziellen Darstellungen der Baryonen- und Bosonenamplituden zu berechnen, und sie zur Bestimmung von Gleichungen zum Spin j des Gesamtsystems zu benutzen. Dazu gehen wir in das Ruhesystem des Teilchens. Die Drehimpulsausreduktion der Wellenfunktionen und Integralkerne wird dann im Ruhesystem durchgeführt. Da wir konsequent eine graphische Schreibweise verwenden, um die umfangreichen Rechnungen zu bewältigen, werden wir zunächst die Ausgangsgleichungen in Graphenform schreiben, und danach die ausreduzierten Gleichungen berechnen.

4.1. Darstellungen der Baryonen- und Bosonenamplituden

Der Spin des "Bosonen"-Teilsystems im Baryonenzustand kann nur die Werte o oder 1 annehmen. Das liefert die Möglichkeit, für die Spinbeschreibung des "Bosons" die Partialamplituden auf einer $\bar{\sigma}_\mu$ -Algebra aufzuspannen. Wenn wir noch zur Darstellung der Spin-0-Zustände die Amplituden $\chi_I^{(K),0}$, und für Spin-1-Zustände die Amplituden $\chi_I^{(K),i}$, $i=1,2,3$ einführen, so können wir setzen:

$$
\begin{aligned}
\chi_I^{(FFF)}(t;\, {}^{p}_{\alpha\beta}\,|\,{}^{J-p}_{\gamma}) &= (\bar{\sigma}_\nu C_\sigma)_{\alpha\beta}\, \chi_I^{(FFF),\nu}(t;\, p\,|\,{}^{J-p}_{\gamma}) \\
\chi_I^{(FFA)}(t;\, {}^{p}_{\alpha\beta}\,|\,{}^{J-p}_{\gamma}) &= (\bar{\sigma}_\nu C_\sigma)_{\alpha\beta}\, \chi_I^{(FFA),\nu}(t;\, p\,|\,{}^{J-p}_{\gamma}) \\
\chi_I^{(FAF)}(t;\, {}^{p}_{\alpha\beta}\,|\,{}^{J-p}_{\gamma}) &= (\bar{\sigma}_\nu)_{\alpha\beta}\, \chi_I^{(FAF),\nu}(t;\, p\,|\,{}^{J-p}_{\gamma}) \\
\chi_I^{(AFF)}(t;\, {}^{p}_{\alpha\beta}\,|\,{}^{J-p}_{\gamma}) &= (\bar{\sigma}_\nu^{T})_{\alpha\beta}\, \chi_I^{(AFF),\nu}(t;\, p\,|\,{}^{J-p}_{\gamma})
\end{aligned}
\qquad (4.1)
$$

Die c_σ -Matrizen garantieren das richtige Transformationsverhalten. Anstelle des Lorentzindex ν können wir auch die in Anhang IV definierte sphärische Schreibweise einführen, indem wir ν durch Spinindizes rr_3 ersetzen:

$$
\chi_I^{(K),\nu}(t;\, p\,|\,{}^{J-p}_{\alpha}) \longleftrightarrow \chi_I^{(K),rr_3}(t;\, p\,|\,{}^{J-p}_{\alpha}) \qquad (4.2)
$$

Dabei kann r die Werte 0 und 1 annehmen.

Wenn wir jetzt in (3. 39) $j' = r$ und $j'' = 1/2$ setzen, dann folgt mit etwas geänderter Bezeichnungsweise für die Baryonenamplitden unmittelbar die Darstellung:

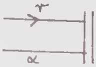
K = FFF, FAF :

$$\chi_{I}^{(K),\tau\tau_3}(t,p|{}^{j\text{-}p}_{\alpha}) = \sum_{\substack{ss_3\\ \ell\ell_3}} \chi^{(K)}_{I;j}(t,M,p;(\tau\ell)s)\,[s]^{-1/2}\langle \tau\tau_3\, ss_3|\ell\ell_3\rangle \times \langle ss_3\tfrac{1}{2}\alpha|jj_3\rangle \left(\frac{4\pi}{[\ell]}\right)^{1/2} Y^{\ell_3}_{\ell}(\vec{p}) \qquad (4.3)$$

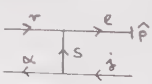
K = FFA :

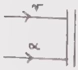
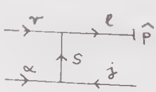
$$\chi_{I}^{(K),\tau\tau_3}(t,p|{}^{j\text{-}p}_{\alpha}) = C_{\alpha,\alpha\alpha'}\sum_{\substack{ss_3\\ \ell\ell_3}} \chi^{(K)}_{I;j}(t,M;p;(\tau\ell)s)\,[s]^{-1/2}\langle \tau\tau_3\, ss_3|\ell\ell_3\rangle \times \langle ss_3\tfrac{1}{2}\alpha'|jj_3\rangle \left(\frac{4\pi}{[\ell]}\right)^{1/2} Y^{\ell_3}_{\ell}(\vec{p}) \qquad (4.4)$$

Aus praktischen Gründen wurden dabei die Clebsch-Gordan-Koeffizienten der Drehgruppe umgeordnet, was unwesentliche Phasenfaktoren produziert. Aus denselben Gründen wurden in (4. 3, 4) auch die Drehimpuls-Multiplizitätsfaktoren benutzt.
p bedeutet hier die Abhängigkeit von p^0 und $p^1 := |\vec{p}|$, da die Winkelabhängigkeit jetzt absepariert ist. $(r,l)s$ symbolisiert die Abhängigkeit vom Kopplungsschema, das eigentlich genauer $[((1/2,1/2)\tau,\ell)s,1/2]j$ geschrieben wird. Es werden also die beiden "Spins" 1/2 der Elementarsysteme, die das "Boson" aufbauen zu r verkoppelt, anschließend wird r mit dem "Bahndrehimpuls" l zu s, und schließlich s mit dem "Spin" 1/2 des dritten Elementarsystems zum Gesamtspin j zusammengesetzt.
Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden wir manchmal nicht die volle Abhängigkeit der Amplituden von den in (4. 3, 4) vorkommenden Größen angeben, sondern nur die jeweils wesentlichen Variablen. Die übrigen sind dann stets sinngemäß zu ergänzen.
Für die Amplituden $\chi_{I}^{(K),\tau\tau_3}(t;p|{}^{j\text{-}p}_{\alpha})$ führen wir folgende graphische Schreibweise ein

$$\chi_{I}^{(K),\tau\tau_3}(t;p|{}^{j\text{-}p}_{\alpha}) =: $$  $\chi^{(K)}$ (4. 5)

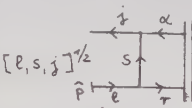
wobei die Orientierung der α-Spinorlinie vom Transformationsverhalten des dritten Elementarsystems abhängt. ("F"=auswärts, "A"= einwärts orientiert!)
Damit lassen sich die Darstellungen (4. 3, 4) graphisch darstellen:

$\chi^{\binom{FFF}{FAF}} = \sum_{\ell,s} \chi_{j}^{\binom{FFF}{FAF}}((\tau,\ell)s)\,[\ell,s,j]^{1/2}$  (4. 6)

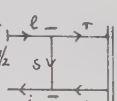
 $\chi^{(FFA)} = \sum_{\ell,s} \chi_{j}^{(FFA)}((\tau,\ell)s)\,[\ell,s,j]^{1/2}$  (4. 7)

Mit den Regeln der Clebsch-Gordan-Algebra und den Orthogonalitätsrelationen der Kugelflächenfunktionen können wir die Darstellungen (4. 6, 7) leicht umkehren, und erhalten:

$$\chi_j^{\binom{FFF}{FAF}}((\tau,\ell)s) = \int \frac{d\vec{\hat{p}}}{4\pi}\,[\ell,s,j]^{1/2}$$

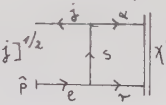


$$\chi^{\binom{FFF}{FAF}} = \int \frac{d\vec{\hat{p}}}{4\pi}[\ell,s,j]^{1/2}$$

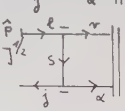


$$\chi^{\binom{FFF}{FAF}} \qquad (4.8)$$

$$\chi_j^{(FFA)}((\tau,\ell)s) = \int \frac{d\vec{\hat{p}}}{4\pi}[\ell,s,j]^{1/2}$$



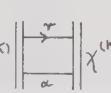
$$\chi^{(FFA)} = \int \frac{d\vec{\hat{p}}}{4\pi}[\ell,s,j]^{1/2}$$



$$\chi^{(FFA)} \qquad (4.9)$$

Außerdem verifiziert man sofort:

$$\int \frac{d\vec{\hat{p}}}{4\pi}\,\chi^{(K)}_{\nu,\alpha}\,\chi^{(K)',\nu}_{\alpha'} = \sum_{\tau=0}^{1}\int \frac{d\vec{\hat{p}}}{4\pi}\,\chi^{(K)}$$

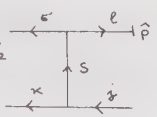


$$\chi^{(K)} = \sum_{\tau,\ell,s}\left[\chi_j^{(K)}((\tau,\ell)s)\right]^2 \qquad (4.10)$$

Für die Darstellungen der Bosonenamplituden, die wie die Baryonenamplituden aus zwei Elementarsystemen aufgebaut werden, lassen sich die obigen Betrachtungen fast wörtlich wiederholen. Der einzige Unterschied besteht darin, daß anstelle der "Bosonen"-Linie r eine zweite Spin-1/2-Linie auftritt. Man erhält analog zu (4. 6, 7):

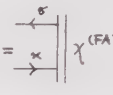
$$\chi^{(FF)}_{\tau}\begin{pmatrix} j-\rho & \rho \\ \sigma & \varkappa \end{pmatrix} =$$

$$\chi^{(FF)} = \sum_{\ell,s}\chi^{(FF)}_{\tau;j}(M,\rho;\ell,s)\,[\ell,s,j]^{1/2}$$

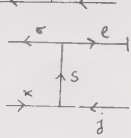


(4.11)

$$\chi^{(FA)}_{\tau}\begin{pmatrix} j-\rho & \rho \\ \sigma & \varkappa \end{pmatrix} =$$



$$\chi^{(FA)} = \sum_{\ell,s}\chi^{(FA)}_{\tau;j}(M,\rho;\ell,s)\,[\ell,s,j]^{1/2}$$



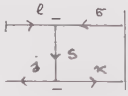
(4.12)

Und für die Umkehrungen:

$$\chi_j^{(FF)}(\ell,s) = \int \frac{d\vec{\hat{p}}}{4\pi}\,[\ell,s,j]^{1/2}$$

$$\chi^{(FF)} \qquad (4.13)$$

$$\chi_j^{(FA)}(\ell,s) = \int \frac{d\vec{\hat{p}}}{4\pi}\,[\ell,s,j]^{1/2}$$



$$\chi^{(FA)} \qquad (4.14)$$

Die Relation (4. 10) gilt mit $r \to 1/2$, $r_3 \to \sigma$ und $\alpha \to \varkappa$ völlig analog. Mit l, s, genauer $((\tfrac{1}{2},\ell)s,\tfrac{1}{2})j$, wurde wieder die Abhängigkeit von Kopplungsschema charakterisiert.

4.2. Spin-Ausreduktion der Baryonengleichungssysteme

Mit Hilfe der Matrixdarstellung (4.1) des Bosonenspins können wir aus den Gleichungen (2.42-45) durch Einsetzen leicht die bezüglich des Spins des Teilsystems ausreduzierten Gleichungen berechnen. Wir erhalten:

$$\chi^{(F)}_{1/2}(\,{}^{J}_{\alpha}) = \frac{e^2}{4} G^{\mu}(J) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \Big\{ (\bar\sigma_\mu C_\sigma)_{\alpha\beta} \chi^{(FFA),0}_{1/2}(1,q\,|\,{}^{J-q}_{\beta}) + \frac{1}{6}(\bar\sigma_\mu \sigma_\lambda)_{\alpha\beta} \sum_t \chi^{(FAF),\lambda}_{1/2}(t,q\,|\,{}^{J-q}_{\beta}) \Big\} \tag{4.15}$$

$$\chi^{(FFF),\nu}_{I}(t,p\,|\,{}^{J-p}_{\alpha}) =$$

$$= \frac{1}{6}\delta_{t,1} Sp(\bar\sigma_\mu \sigma_\lambda \sigma^\nu) \sum_i K_i(1;p) P_i^{\prime\lambda\mu}(p)\, \chi^{(FFF),0}_{I}(1;p\,|\,{}^{J-p}_{\alpha}) \tag{4.16}$$

$$+\frac{e^2}{3} T(I,t,1) \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \big[G^\mu(q+p-J)F^\lambda(J-p) + G^\lambda(J-p)F^\mu(q+p-J)\big]\big[\bar\sigma_\lambda \sigma_\mu (\sigma^\nu + (-)^{t+1}\bar\sigma^\nu)\big]_{\alpha\beta} \chi^{(FFF),0}_{I}(1;q\,|\,{}^{J-q}_{\beta})$$

$$\chi^{(FFA),\nu}_{I}(t,p\,|\,{}^{J-p}_{\alpha}) = \tag{4.17}$$

$$= \frac{1}{6}\delta_{t,1} Sp(\bar\sigma_\mu \sigma_\lambda \sigma^\nu) \sum_i K_i(1;p) P_i^{\prime\mu\lambda}(p)\, \chi^{(FFA),0}_{I}(1;p\,|\,{}^{J-p}_{\alpha})$$

$$+\frac{e^2}{2} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \big[G^\mu(q+p-J)F^\lambda(J-p) + G^\lambda(J-p)F^\mu(q+p-J)\big]\big[C_\sigma \sigma_\lambda \bar\sigma_\varrho \sigma_\mu (\sigma^\nu + (-)^{t+1}\bar\sigma^\nu)\big]_{\alpha\beta} \times$$

$$\times \sum_{t'} (-)^{t'} T(I,t,t')\, \chi^{(FAF),\varrho}_{I}(t';q\,|\,{}^{J-q}_{\beta})$$

$$+\frac{1}{3}\delta_{I,1/2}\delta_{t,1} \sum_i \big[2K_i(1;p)F^\lambda(J-p) + K_i(1;p)G^\lambda(J-p)\big] P_i^{\prime\mu\varrho}(p)\, Sp(\bar\sigma_\mu \sigma_\varrho \sigma^\nu)(C_\sigma \sigma_\lambda)_{\alpha\beta} \chi^{(F)}_{1/2}(\,{}^{J}_{\beta})$$

$$-\frac{4}{3}\delta_{I,1/2} F^\lambda(J-p)\big[C_\sigma \sigma_\lambda (\sigma^\nu + (-)^{t+1}\bar\sigma^\nu)\big]_{\alpha\beta} \chi^{(F)}_{1/2}(\,{}^{J}_{\beta})$$

$$\chi^{(FAF),\nu}_{I}(t,p\,|\,{}^{J-p}_{\alpha}) = \tag{4.18}$$

$$= \frac{4}{3}\sum_i K_i(t;p)\, P_i^{\nu\varrho}(p)\, \chi^{(FAF),\varrho}_{I}(t;p\,|\,{}^{J-p}_{\alpha})$$

$$+\frac{e^2}{6} \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} \big[G^\mu(q+p-J)F^\lambda(J-p) + G^\lambda(J-p)F^\mu(q+p-J)\big] \Big\{ \sum_{t'} T(I,t,t')(\bar\sigma_\lambda \sigma_\varrho \bar\sigma_\mu \sigma^\nu)_{\alpha\beta} \chi^{(FAF),\varrho}_{I}(t';q\,|\,{}^{J-q}_{\beta})$$

$$+2(-)^{t+1} T(I,t,1)(\bar\sigma_\lambda \sigma_\mu \bar\sigma^\nu C_\sigma)_{\alpha\beta} \chi^{(FFA),0}_{I}(1;q\,|\,{}^{J-q}_{\beta})$$

$$-\frac{4}{3}\delta_{I,1/2} \sum_i \big[2K_i(t;p)F^\lambda(J-p) + K_i(t;p)G^\lambda(J-p)\big] P_i^{\nu\varrho}(p)(\bar\sigma_\lambda \sigma^\varrho)_{\alpha\beta} \chi^{(F)}_{1/2}(\,{}^{J}_{\beta})$$

$$+\frac{4}{3}\delta_{I,1/2} F^\lambda(J-p)(\bar\sigma_\lambda \sigma^\nu)_{\alpha\beta} \chi^{(F)}_{1/2}(\,{}^{J}_{\beta})$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit führen wir für die in den Gleichungen (4.15-18) auftretenden Integralkerne die folgenden Abkürzungen ein, wobei wir auch gleich die graphische Form der Kerne angeben, nachdem für die Lorentzindizes wieder zur sphärischen Darstellung übergegangen wurde:

$$K^{\circ\,(FFA)}_{\alpha\beta,\nu}(\mathfrak{I}) := \frac{e^2}{4(2\pi)^4}(\bar\sigma_\mu\sigma_\sigma)_{\alpha\beta}G^\mu(\mathfrak{I})\,\delta_{\nu,0} \longleftrightarrow \frac{e^2}{4(2\pi)^4}\sum_{\tau'\tau'_3}(\bar\sigma_{\tau'\tau'_3}\sigma_\sigma)_{\alpha\beta}G^{\tau'\tau'_3}(\mathfrak{I})\,\delta_{\tau,0}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,e^2}{4(2\pi)^4}\,g(\mathfrak{I})\,\delta_{\tau,0}\sum_{\tau'}(-)^{\tau'}[\tau']^{1/2}\,\mathfrak{I}^{\tau'} \qquad (4.19)$$

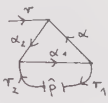
$$K^{\circ\,(FAF)}_{\alpha\beta,\lambda}(\mathfrak{I}) := \frac{e^2}{24(2\pi)^4}(\bar\sigma_\mu\sigma_\lambda)_{\alpha\beta}G^\mu(\mathfrak{I}) \longleftrightarrow \frac{e^2}{24(2\pi)^4}\sum_{\tau'\tau'_3}(\bar\sigma_{\tau'\tau'_3}\sigma_{\tau\tau_3})_{\alpha\beta}G^{\tau'\tau'_3}(\mathfrak{I})$$

$$= \frac{e^2}{12(2\pi)^4}\,g(\mathfrak{I})\sum_{\tau'}(-)^{\tau'}[\tau,\tau']^{1/2}\,\mathfrak{I}^{\tau'} \qquad (4.20)$$

$$\Pi^\nu_i(p) := Sp(\bar\sigma_\mu\sigma_\lambda\sigma^\nu)\,P^{\prime\mu\lambda}_i(p)$$

$$\longleftrightarrow 2\sqrt{2}\sum_{\tau_1\tau_2}(-)^{\tau_1}[\tau,\tau_1,\tau_2]^{1/2}\left\{a'_i\delta_{\tau_1\tau_2}\right. \qquad (4.21)$$

$$\left. + b'_i\frac{p^{\tau_1}p_{\tau_2}}{p^2}\right\}$$



$$\frac{1}{6}\sum_i K^q_i(t;p)\,\Pi^\nu_i(p) \longleftrightarrow \qquad (4.22)$$

$$K^{(FFF),\nu}_{\alpha\beta,0}(t;\mathfrak{I},p,q) := \frac{1}{3}\left[(\bar\sigma_\lambda\sigma_\mu(\sigma^\nu+(-)^{t+1}\bar\sigma^\nu))\right]_{\alpha\beta}K^{\mu\lambda}(\mathfrak{I},p,q)$$

In (4.22) wurde gesetzt:

$$K^{\mu\lambda}(\mathfrak{I},p,q) := \frac{e^2}{(2\pi)^4}\left[G^\mu(q+p-\mathfrak{I})F^\lambda(\mathfrak{I}-p)+G^\lambda(\mathfrak{I}-p)F^\mu(q+p-\mathfrak{I})\right] \qquad (4.23)$$

Man erkennt, daß $G^\mu(q+p-\mathfrak{I})$ und $F^\mu(q+p-\mathfrak{I})$ noch von den Winkeln $\hat p$ und $\hat q$ abhängen. Wir entwickeln $K^{\mu\lambda}(\mathfrak{I},p,q)$ daher nach Kugelflächenfunktionen, um die Winkelabhängigkeit abzuseparieren.

Man erhält:

$$K^{\mu\lambda}(\mathfrak{I},p,q) = (\mathfrak{I}-p)^{\mu}(q+p-\mathfrak{I})^{\lambda} \sum_{L=0}^{\infty} \frac{[L]}{4\pi} K_L \quad \hat{p} \longmapsto \overset{L}{\longrightarrow} \hat{q} \qquad (4.24)$$

Dabei ist K_L durch

$$K_L := \frac{e^2}{(2\pi)^4} \frac{4\pi}{[L]} \left[g_L f(\mathfrak{I}-p) + f_L g(\mathfrak{I}-p) \right] \qquad (4.25)$$

definiert. Die Funktionen f_L und g_L ergeben sich in folgender Weise. Zunächst entwickelt man $g(p+q-\mathfrak{I})$:

$$\begin{aligned} g(q+p-\mathfrak{I}) = \frac{1}{(q+p-\mathfrak{I})^2} &= \sum_{L=0}^{\infty} g_L \, P_L(\vec{\hat{q}}\cdot\vec{\hat{p}}) \\ &= \sum_{L_1 L_3} g_L \frac{4\pi}{[L]} Y_L^{L_3}(\vec{\hat{p}}) \, Y_L^{L_3 *}(\vec{\hat{q}}) \\ &= \sum_{L} g_L \, \hat{p} \longmapsto \overset{L}{\longrightarrow} \hat{q} \end{aligned} \qquad (4.26)$$

wobei die Entwicklungsfunktionen g_L im wesentlichen LEGENDREsche Funktionen 2. Art sind, die mit Q_L bezeichnet werden:

$$g_L := \frac{[L]}{2p'q'} Q_L \left(1 + \frac{(M-p^{\circ}q^{\circ})^2 - (p'+q')^2}{2p'q'} \right) \qquad (4.27)$$

Die Funktionen f_L ergeben sich in analoger Weise aus der Entwicklung von $f(p+q-\mathfrak{I})$:

$$\begin{aligned} f(q+p-\mathfrak{I}) &= i\varkappa^4 \frac{1}{[(q+p-\mathfrak{I})^2]^2 [(q+p-\mathfrak{I})^2 - \varkappa^2]} \\ &= \sum_{L_1 L_3} f_L \frac{4\pi}{[L]} Y_L^{L_3 *}(\vec{\hat{q}}) \, Y_L^{L_3}(\vec{\hat{p}}) \\ &= \sum_{L} f_L \, \hat{p} \longmapsto \overset{L}{\longrightarrow} \hat{q} \end{aligned} \qquad (4.28)$$

Wenn man die FEYNMAN-Nenner in (4.28) einzeln gemäß (4.26) entwickelt, und die entstehenden Reihen multipliziert, so lassen sich die f_L formal durch die g_L und deren Ableitungen g_L' ausdrücken:

$$f_L = i\varkappa^4 \sum_{\mathfrak{I},K} [L] \begin{pmatrix} \mathfrak{I} & K & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 g_{\mathfrak{I}}(\varkappa^2) \, g_K'(0) \qquad (4.29)$$

(4.30)

(4.31)

(4.32)

Weiter definieren wir:

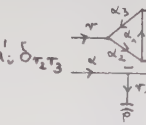
(4.33)

(4.34)

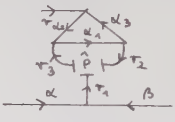
$$K^{2\,(FFA),\nu}_{\alpha\beta}(\mathfrak{z};p) := \frac{1}{3}\sum_i \Big[2\overset{q}{K}_i(1;p)F^{\lambda}(\mathfrak{z}-p)+\overset{b}{K}_i(1;p)\,G^{\lambda}(\mathfrak{z}-p)\Big]\Pi^{\nu}_{i}(p)\,(C_\sigma\sigma_\lambda)_{\alpha\beta}$$

$$\leftrightarrow -\frac{4}{3}\sum_i\Big[2\overset{q}{K}_i(1;p)f(\mathfrak{z}-p)+\overset{b}{K}_i(1;p)\,g(\mathfrak{z}-p)\Big]\sum_{\tau_1\tau_2\tau_3}(-)^{\tau_2}[\tau,\tau_1,\tau_2,\tau_3]^{1/2}(p-\mathfrak{z})^{\tau_1}\times$$

$$\times\Big\{a_i'\,\delta_{\tau_2\tau_3}$$



$$+\,b_i'\frac{p^{\tau_2}p_{\tau_3}}{p^2}$$

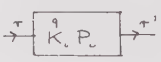


$$\Big\}\qquad(4.35)$$

$$=:$$

$$\frac{4}{3}\sum_i\overset{q}{K}_i(t;p)\,P^{\nu}_{i}(p)\leftrightarrow\frac{4}{3}\sum_i\overset{q}{K}_i(t;p)\Big[a_i\,\delta_{\tau\tau'}\,\overset{\tau}{\rightarrow}+b_i\frac{p^{\tau}p_{\tau'}}{p^2}\,\overset{\tau}{\rightarrow}\hat{p}\,\overset{\tau'}{\mapsto}\Big]\qquad(4.36)$$

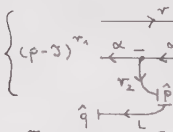
$$=:$$



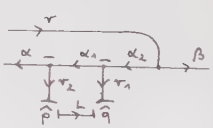
$$K^{1\,(FAF),\nu}_{\alpha\beta}(\mathfrak{z};p;q) := \frac{1}{3}\,(\bar\sigma_\lambda\sigma_\mu\bar\sigma^{\nu}C_\sigma)_{\alpha\beta}\,K^{\mu\lambda}(\mathfrak{z};p;q)$$

$$\leftrightarrow\frac{2\sqrt{2}}{3}\sum_L\frac{[L]}{4\pi}K_L\sum_{\tau_1\tau_2}(-)^{\tau_1+\tau_2}[\tau,\tau_1,\tau_2]^{1/2}(p-\mathfrak{z})^{\tau_2}\times\qquad(4.37)$$

$$\times\Big\{(p-\mathfrak{z})^{\tau_1}$$



$$+\,q^{\tau_1}$$



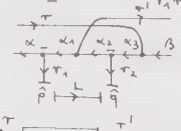
$$\Big\}$$

$$=:$$

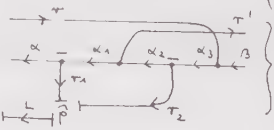
$$K^{2\,(FAF),\nu}_{\alpha\beta\,\sigma}(\mathfrak{z};p;q) := \frac{1}{6}\,(\bar\sigma_\lambda\sigma_\sigma\bar\sigma_\mu\sigma^{\nu})_{\alpha\beta}\,K^{\mu\lambda}(\mathfrak{z};p;q)$$

$$\leftrightarrow-\frac{2}{3}\sum_L\frac{[L]}{4\pi}K_L\sum_{\tau_1\tau_2}(-)^{\tau_1+\tau_2}[\tau,\tau',\tau_1,\tau_2]^{1/2}(p-\mathfrak{z})^{\tau_1}\qquad(4.38)$$

$$\times\Big\{q^{\tau_2}$$

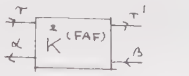


$$+\,(p-\mathfrak{z})^{\tau_2}$$



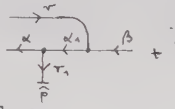
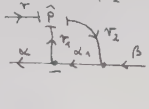
$$\Big\}$$

$$=:$$



$$\mathcal{L}^{\tau}_{\alpha\beta}(t;J,p) := \frac{4}{3}\sum_i \Big\{\big[1-2K_i^q(t;p)\big]F^{\lambda}(J-p) - K_i^b(t;p)G^{\lambda}(J-p)\Big\}(\bar\sigma_\lambda\sigma^\varepsilon)_{\alpha\beta}P_i^{\tau}{}_{\varepsilon}(p)$$

$$\leftrightarrow -\frac{8}{3}\sum_i\Big[\big(1-2K_i^q(t;p)\big)f(J-p) - K_i^b(t;p)g(J-p)\Big]\sum_{\tau_1\tau_2}(p-J)^{\tau_1}$$

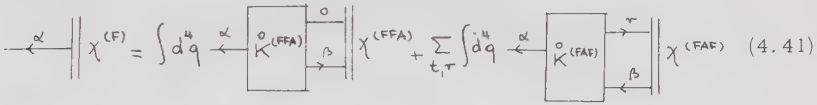
$$\times\Big\{a_i\delta_{\tau\tau_2}$$  $$+\ b_i\frac{p^{\tau}p_{\tau_2}}{p^2}$$  $$\Big\} \qquad (4.39)$$

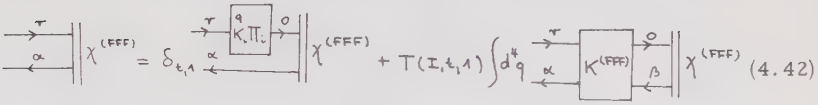
$$=:$$

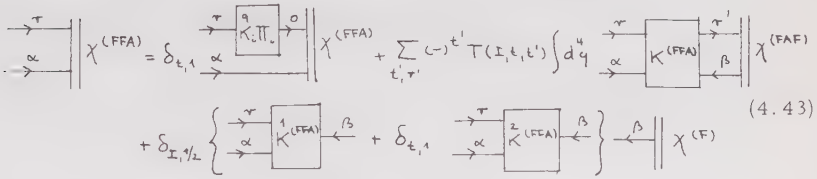
Wenn wir schließlich noch setzen

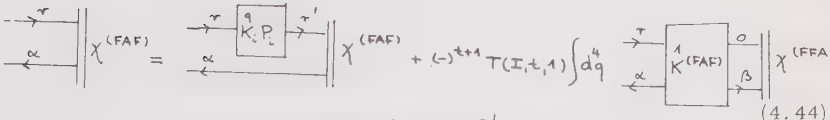
$$\chi^{(F)}_{1/2}(J_\alpha) =:$$ $$\qquad (4.40)$$

so können wir die Baryonengleichungen in graphischer Form schreiben.

 $$\qquad (4.41)$$

 $$\qquad (4.42)$$

 $$\qquad (4.43)$$

 $$\qquad (4.44)$$

Um aus diesen Gleichungen die ausreduzierten Gleichungen zu erhalten, setzen wir in den Darstellungen (4.8,9) für die nicht-ausreduzierten Amplituden die rechten Seiten der Gleichungen (4.41-44) ein, nachdem dort die Darstellungen (4.6,7) eingesetzt wurden. Das liefert zunächst für die 1-Punktfunktion:

$$\chi^{(F)}_{1/2,1/2}(M) = \frac{e^2}{2(2\pi)^3}\frac{1}{M}\int dq^0 dq^1 (q^1)^2 \left\{ \frac{1}{12}\sum_{\tau,t}(-)^{\tau}[\tau]^{1/2}\,\chi^{(FAF)}_{1/2;1/2}(t;M;q,(\tau,0)\tau) - \chi^{(FFA)}_{1/2;1/2}(1;M;q;(0,0)0)\right\} \tag{4.45}$$

Für die 3-Punktamplituden ergeben sich entsprechend kompliziertere Gleichungen:

$$\chi^{(FFF)}_{I;j}(t;M;p;(\tau,\ell)s) =$$

$$= \delta_{t,1}\sum_{\tau'\ell's'} B_j(t;p;\tau,\ell,s|\tau',\ell',s')\,\chi^{(FFF)}_{I;j}(t;M;p;(\tau',\ell')s') \tag{4.46}$$

$$+ T(I,t,1)\int dq^0 dq^1 (q^1)^2 \sum_{\tau'\ell's'} K^{(FFF)}_j(t,M;p,q,\tau,\ell,s|\tau',\ell',s')\,\chi^{(FFF)}_{I,j}(t;M;q;(\tau',\ell')s')$$

$$\chi^{(FFA)}_{I;j}(t;M;p;(\tau,\ell)s) =$$

$$= \delta_{t,1}\sum_{\tau'\ell's'} B_j(t,p,\tau,\ell,s|\tau',\ell',s')\,\chi^{(FFA)}_{I,j}(t;M,p,(\tau',\ell')s') \tag{4.47}$$

$$+ \sum_{\tau'\ell's'}(-)^{t'}T(I,t,t')\int dq^0 dq^1 (q^1)^2 K^{(FFA)}_j(t;M;p,q,\tau,\ell,s|\tau',\ell',s')\,\chi^{(FAF)}_{I,j}(t';M;q;(\tau',\ell')s$$

$$+ \delta_{I,1/2}\delta_{j,1/2}\left[\hat{K}^{(FFA)}(M,p,\tau,\ell,s) + \delta_{t,1}\overset{2}{K}{}^{(FFA)}(M,p;\tau,\ell,s)\right]\chi^{(F)}_{1/2,1/2}(M)$$

$$\chi^{(FAF)}_{I;j}(t;M;p;(\tau,\ell)s) =$$

$$= \sum_{\tau'\ell's'} K^{B}_j(t;M;p;\tau,\ell,s|\tau',\ell',s')\,\chi^{(FAF)}_{I,j}(t,M,p,(\tau',\ell')s') \tag{4.48}$$

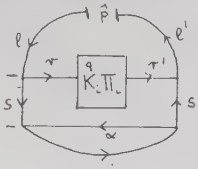
$$+ (-)^{t+1}T(I,t,1)\sum_{\tau'\ell's'}\int dq^0 dq^1 (q^1)^2\,\hat{K}^{(FAF)}_j(M;p,q;\tau,\ell,s|\tau',\ell',s')\,\chi^{(FFA)}_{I;j}(t;M;q;(\tau',\ell')s$$

$$+ \sum_{\tau'\ell's'} T(I,t,t')\int dq^0 dq^1 (q^1)^2\,\overset{2}{K}{}^{(FAF)}_j(M;p,q,\tau,\ell,s|\tau',\ell',s')\,\chi^{(FAF)}_{I;j}(t';M;q;(\tau',\ell')s'$$

$$+ \delta_{I,1/2}\delta_{j,1/2}\,\mathcal{L}(t,M,p;\tau,\ell,s)\,\chi^{(F)}_{1/2;1/2}(M)$$

Die ausreduzierten Kerne sind dabei in folgender Weise definiert:

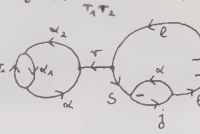
$$B_j(t;p,\tau,\ell,s\,|\,\tau',\ell',s') := \int\frac{d\vec{\hat{p}}}{4\pi}[\ell,s,\ell',s']^{1/2}$$



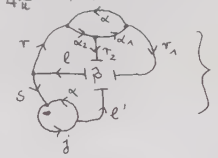
(4.49)

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\delta_{\tau'0}\sum_\ell^q K_\ell(t;p)\sum_{\tau_1\tau_2}(-)^{\tau_1}[\tau_1,\tau_2,\tau]^{1/2}\,\delta_{\ell's'}\int\frac{d\vec{\hat{p}}}{4\pi}[\ell,\ell',s]^{1/2}\times$$

$$\times\Bigg\{a'_\ell\,\delta_{\tau_1\tau_2}$$



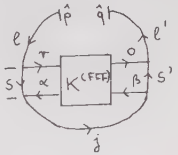
$$+\,b'_\ell\,\frac{p^{\tau_1}p_{\tau_2}}{p^2}$$



$$\Bigg\}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3}\delta_{\tau 0}\delta_{\tau'0}\delta_{\ell s}\delta_{\ell's'}\delta_{\ell\ell'}\sum_\ell^q K_\ell(t;p)\,[4a'_\ell+b'_\ell]$$

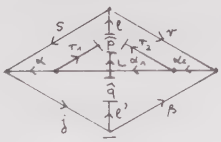
$$K_j^{(FFF)}(t;M;p,q;\tau,\ell,s\,|\,\tau',\ell',s') := 4\pi\int\frac{d\vec{p}}{4\pi}\int\frac{d\vec{q}}{4\pi}[\ell,s,\ell',s']^{1/2}$$



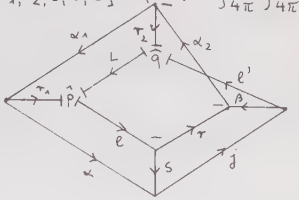
(4.50)

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[1+(-)^{\tau+t+1}\right]\delta_{\ell's'}\delta_{\tau'0}\sum_L[L]K_L\sum_{\tau_1\tau_2}(-)^{\tau_1}[\tau,\tau_1,\tau_2,\ell,\ell',s]^{1/2}(p\cdot y)^{\tau_1}\int\frac{d\vec{\hat{p}}}{4\pi}\int\frac{d\vec{q}}{4\pi}$$

$$\times\Bigg\{(p\cdot y)^{\tau_2}-$$



$$+\quad q^{\tau_2}-$$



$$\Bigg\}$$

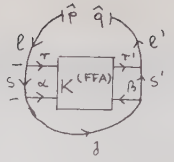
$$= -\frac{\sqrt{2}}{3}\left[1+(-)^{\tau+t+1}\right]\delta_{\tau'0}\,\delta_{\ell's'}\,[\tau,s]^{1/2}\Bigg\{(-)^{\ell'+1}K_{\ell'}\sum_{x,y}(p\cdot y)^{|\ell-x|}(p\cdot y)^{|\ell'-x|}\times$$

$$\times\begin{Bmatrix}\tau & \ell & s\\ y & 1/2 & 1/2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}j & \ell' & 1/2\\ y & s & 1/2\end{Bmatrix}\Delta(y\,\ell\,1/2)\,\Delta(y\,\ell'\,1/2)\,\Delta(y\,x\,1/2)\,\Delta(s\,1/2\,y)+$$

$$+\sum_L(-)^{\tau+s+|\ell'-L|}K_L(p\cdot y)^{|\ell-L|}q^{|\ell'-L|}\sum_x(-)^{x-j}[x]\begin{Bmatrix}\tau & j & x\\ \ell' & 1/2 & 1/2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\tau & j & x\\ 1/2 & \ell & s\end{Bmatrix}\times$$

$$\times\ \Delta(j\,x\,\tau)\,\Delta(x\,\ell\,1/2)\,\Delta(x\,\ell'\,1/2)\,\Delta(x\,L\,1/2)\Bigg\}$$

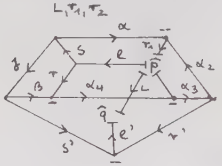
$$K_j^{(FFA)}(t;M;p;q;\tau,\ell,s|\tau',\ell',s') := 4\pi \int \frac{d\vec{p}}{4\pi} \int \frac{d\vec{q}}{4\pi} [\ell,s,\ell',s']^{1/2}$$



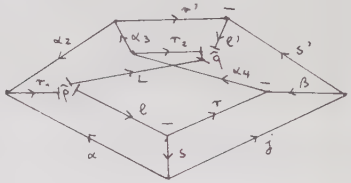
(4.51)

$$= 2(-)^{\tau'+1}[1+(-)^{\tau+\ell+1}] \sum_{L,\tau_1,\tau_2} [L] K_L [\tau,\tau',\tau_1,\tau_2,\ell,\ell',s,s']^{1/2} (p-y)^{\tau_1} \int \frac{d\vec{p}}{4\pi} \int \frac{d\vec{q}}{4\pi} \times$$

$$\times \Bigg\{ (p-y)^{\tau_1}$$



$$+ q^{\tau_2} -$$



$$\Bigg\}$$

$$= 2\left[1+(-)^{\tau+\ell+1}\right][\tau,\tau',s,s']^{1/2} \Bigg\{ \frac{1}{2} \sum_L K_L (p-y)^{|\ell-L|} q^{|\ell'-L|} (-)^{\ell+\tau+s+s'+j+3/2}$$

$$\times \sum_{x,y} (-)^{x+y} [x,y] \Delta(1/2\, x\, L) \Delta(1/2\, y\, L) \; G_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} K_{\ell'} \sum_{\substack{\tau_1 \\ x\,y\,z}} (-)^{x+|\tau_1-z|+z+\tau'+3/2} \times$$

$$\times (p-y)^{\tau_1} (p-y)^{|\tau_1-z|} \begin{pmatrix} x & y & \ell' \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \Delta(1/2\, x\, \ell) \Delta(1/2\, y\, z) \Delta(1/2\, y\, \tau_1) \Delta(\ell/2\, \ell'/2\, z/2) \; G_2 \Bigg\}$$

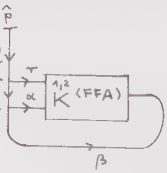
Dabei ist:

$$G_1 := \begin{Bmatrix} 1/2 & s' & x \\ 1/2 & L & y \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & s' & x \\ \ell' & 1/2 & \tau' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j & \tau & y \\ \ell & 1/2 & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j & \tau & y \\ 1/2 & s' & 1/2 \end{Bmatrix} \tag{4.52a}$$

$$G_2 := \begin{Bmatrix} 1/2 & s' & x \\ 1/2 & s & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & \ell & x \\ s & 1/2 & \tau \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau' & 1/2 & y \\ \tau_1 & 1/2 & 1/2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau' & 1/2 & y \\ x & \ell' & s' \end{Bmatrix} \tag{4.52b}$$

Weiter ist:

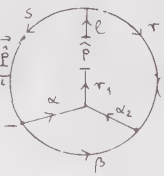
$$K^{1,2\,(FFA)}(M;p;\tau,\ell,s) := \int \frac{d\vec{p}}{4\pi} \frac{[\ell,s]^{1/2}}{[1/2]^{1/2}}$$



(4.53)

Und daraus:

$$\hat{K}^{(FFA)}(M;p;\tau,\ell,s) = \frac{4\sqrt{2}}{3} \sum_{\tau_1} [\tau_1,\tau,\ell,s]^{1/2} (p-y)^{\tau_1} f(y-p) \int \frac{d\vec{p}}{4\pi}$$

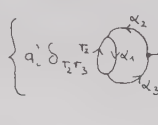


(4.54)

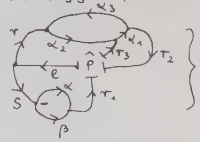
$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} (-)^{s+1} [\tau,s]^{1/2} \begin{Bmatrix} \tau & \ell & s \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{Bmatrix} (p-y)^{\ell} f(y-p)$$

$$\overset{2}{K}{}^{(FFA)}(M;p,\tau,\ell,s) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\sum_i\Big[2\overset{q}{K}_i(1;p)f(\mathcal{P}-p)+\overset{b}{K}_i(1;p)g(\mathcal{P}-p)\Big]\sum_{\tau_1\tau_2\tau_3}(-)^{\tau_2}[\tau,\ell,s,\tau_2,\tau_3]^{1/2} \qquad (4.55)$$

$$\times(p-\mathcal{P})^{\tau_1}\int\frac{d\hat{p}}{4\pi}\Big\{a_i\,\delta_{\tau_2\tau_3}$$

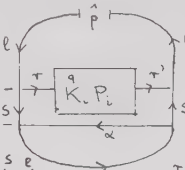


$$+\,b_i\frac{p^{\tau_2}p_{\tau_3}}{p^2}$$

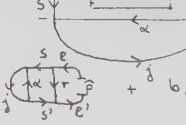


$$=-\frac{2}{3}\frac{1}{[\ell]^{1/2}}\delta_{\tau_0}\delta_{\ell s}(p-\mathcal{P})^{\ell}\sum_i\Big[2\overset{q}{K}_i(1;p)f(\mathcal{P}-p)+\overset{b}{K}_i(1;p)g(\mathcal{P}-p)\Big](4a_i'+b_i')$$

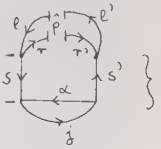
$$\overset{B}{K}_j(t,M;p;\tau,\ell,s|\tau',\ell',s') := \int\frac{d\hat{p}}{4\pi}[\ell,s,\ell',s']^{1/2} \qquad (4.56)$$



$$=\frac{4}{3}\sum_i\overset{q}{K}_i(t;p)[\ell,\ell',s,s']^{1/2}\int\frac{d\hat{p}}{4\pi}\Big\{a_i\,\delta_{\tau\tau'}$$



$$+\,b_i\frac{p^{\tau}p_{\tau'}}{p^2}$$



$$=\frac{4}{3}\sum_i\overset{q}{K}_i(t;p)\;P_i(\tau,\ell,s|\tau',\ell',s)\;\delta_{ss'}$$

wobei ist:

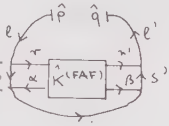
$$P_i(\tau,\ell,s|\tau',\ell',s) := a_i\,\delta_{\tau\tau'}\,\delta_{\ell\ell'}+b_i\frac{p^{\tau}p_{\tau'}}{p^2}\langle\tau\,o\,s\,o|\ell\,o\rangle\langle\tau'o\,s\,o|\ell'o\rangle \qquad (4.57)$$

Die P_i sind Projektionsoperatoren in dem Sinne, daß gilt:

$$\sum_{\tau'\ell'}P_i(\tau,\ell,s|\tau',\ell',s)\,P_j(\tau',\ell',s|\tau'',\ell'',s) = \delta_{ij}\,P_i(\tau,\ell,s|\tau'',\ell'',s) \qquad (4.58)$$

Schließlich definieren wir noch:

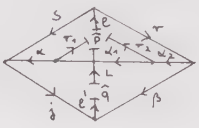
$$\overset{1}{K}{}_j^{(FAF)}(M;p,q,\tau,\ell,s|\tau',\ell',s') := 4\pi\int\frac{d\hat{p}}{4\pi}\int\frac{d\hat{q}}{4\pi}[\ell,s,\ell',s']^{1/2}\delta_{\tau'0}$$



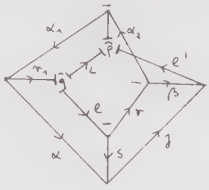
$$(4.59)$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\delta_{\tau'0}\,\delta_{\ell's'}\sum_L[L]\,K_L\sum_{\tau_1\tau_2}(-)^{\tau+\tau_2}[\tau,\tau_1,\tau_2,\ell,\ell',s]^{1/2}(p-\mathcal{P})^{\tau_1}\int\frac{d\hat{p}}{4\pi}\int\frac{d\hat{q}}{4\pi}\times$$

$$\times\Big\{(p-\mathcal{P})^{\tau_2}-$$



$$+\,q^{\tau_2}-$$



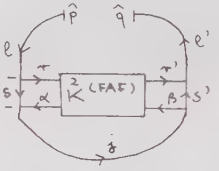
$$= \frac{\sqrt{2}}{3}(-)^{\tau}\delta_{\tau'0}\,\delta_{\ell\ell'}\,[\tau,s]^{1/2}\left\{(-)^{\ell'+1}K_{\ell'}\sum_{x,y}(p-y)^{|\ell-x|}(p-y)^{|\ell'-x|}\times\right.$$

$$\times\begin{Bmatrix}\tau & \ell & s\\ y & 1/2 & 1/2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}j & \ell' & 1/2\\ y & s & 1/2\end{Bmatrix}\Delta(y\,\ell\,1/2)\,\Delta(y\,\ell'\,1/2)\,\Delta(y\,x\,1/2)\,\Delta(s\,1/2\,y)+$$

$$+\sum_{L}(-)^{\tau+s+|\ell'-L|}K_L\,(p-y)^{|\ell-L|}\,q^{|\ell'-L|}\sum_{x}(-)^{x-j}\,[x]\times$$

$$\left.\times\begin{Bmatrix}\tau & j & x\\ \ell' & 1/2 & 1/2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\tau & j & x\\ 1/2 & \ell & s\end{Bmatrix}\Delta(j\,x\,\tau)\,\Delta(x\,\ell\,1/2)\,\Delta(x\,\ell'\,1/2)\,\Delta(x\,L\,1/2)\right\}$$

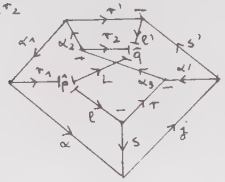
$$K_j^{2\,(FAF)}(M;p,q;\tau,\ell,s\,|\,\tau',\ell',s'):= 4\pi\int\frac{d\vec{p}}{4\pi}\int\frac{d\vec{q}}{4\pi}$$



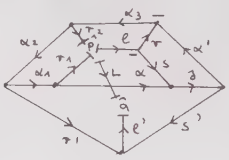
(4.60)

$$= -\frac{2}{3}\sum_{L,\tau_1,\tau_2}[L]\,K_L\,[\tau,\tau',s,s',\ell,\ell',\tau_1,\tau_2]^{1/2}(p-y)^{\tau_1}\int\frac{d\vec{p}}{4\pi}\int\frac{d\vec{q}}{4\pi}\times$$

$$\times\left\{q^{\tau_2}\right.$$



$$+(p-y)^{\tau_2}$$

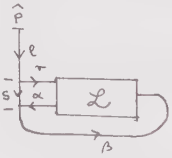


$$\left.\right\}$$

$$= -\frac{1}{3}[\tau,\tau',s,s']^{1/2}\sum_{x,y}[x,y]\left\{\sum_{L}K_L\,(p-y)^{|L-\ell|}\,q^{|L-\ell'|}(-)^{\tau+\tau'+\ell+\ell'+s+s'+L+j+x+y}\times(\right.$$

$$\left.+\sum_{\lambda,\tau_1}K_{\ell'}\,(p-y)^{\tau_1}(p-y)^{|\lambda-\tau_1|}(-)^{\tau+\lambda+x+3/2}[1/2,\ell']^{1/2}\begin{pmatrix}x & y & \ell'\\ 1/2 & -1/2 & 0\end{pmatrix}\Delta(\ell'/2\,\ell'/2\,1/2)\,\Delta(y\,\lambda\,1/2)\,G_2\right\}$$

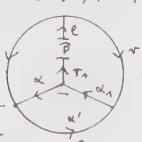
$$\mathcal{L}(t,M;\rho,\tau,\ell,s):=\int\frac{d\vec{p}}{4\pi}\,\frac{[\ell,s]^{1/2}}{[1/2]^{1/2}}$$



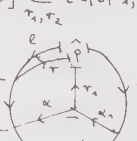
(4.61)

$$= -\frac{4\sqrt{2}}{3}\sum_{i}\left[(1-2K_i^{q}(t;\rho))\,f(y-\rho)-K_i^{b}(t,\rho)\,g(y-\rho)\right]\sum_{\tau_1,\tau_2}[\ell,s,\tau_1,\tau_2]^{1/2}(p-y)^{\tau_1}\int\frac{d\vec{p}}{4\pi}\times$$

$$\times\left\{a_i\,\delta_{\tau\tau_2}\right.$$



$$+\,b_i\,\frac{p^{\tau}p_{\tau'}}{\rho^2}$$



$$\left.\right\}$$

$$= \frac{4}{3}\sum_{i}\left[(1-2K_i^{q}(t;\rho))\,f(y-\rho)-K_i^{b}(t,\rho)\,g(y-\rho)\right]\tilde{P}_i(\tau,\ell,s)$$

wo:

(4.62)

$$\tilde{P}_i(\tau,\ell,s):=a_i(-)^{\ell+s}[\tau,s,1/2]^{1/2}\begin{Bmatrix}\tau & \ell & s\\ 1/2 & 1/2 & 1/2\end{Bmatrix}(p-y)^{\ell}$$

$$+\,b_i(-)^{\tau+1}[\ell]^{1/2}\begin{pmatrix}\tau & \ell & s\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{p^{\tau}}{\rho^2}\left[(p-y)^{s}P_0+(p-y)^{|s-1|}P_1\right]$$

Damit sind die Gleichungen (4.45-48) explizit bekannt, und können für Teilchen mit den Quantenzahlen B, I, j gelöst werden. Dies soll aber in der vorliegenden Arbeit nicht versucht werden, sondern bleibt späteren Untersuchungen vorbehalten.
Bei der Ausreduktion wurde, wie schon bei den Darstellungen(4.3,4) die Tatsache benutzt, daß die starken Wechselwirkungen drehinvariant sind, so daß die Amplituden $\chi_j^{(K)}$ nicht von der magnetischen Quantenzahl j_3 abhängen. Die Variablen p, q bedeuten, wie auch schon oben, lediglich die Abhängigkeit von p^o, q^o bzw. $|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$ (s. Anhang IV). Die Winkelabhängigkeit wurde durch die Drehimpulsausreduktion absepariert.
Die gekoppelten Gleichungen (4.45-48) definieren das Masseneigenwertproblem eines Baryonenzustandes mit den Quantenzahlen B=1 oder 3, I=1/2, 3/2 und dem Spin j. Im allgemeinen Fall bilden sie ein System von maximal 32 Gleichungen für 32 Amplituden, da der Isospin t des "Bosonen"-Teilsystems die Werte t=0 oder 1 annehmen kann, und es 8 Spinkombinationen (r=0, s=l=j$\pm$1/2//r=1, s=l, l$\pm$1/2= j$\pm$1/2) für die 3-Punktfunktionen gibt. Für j=1/2 können jedoch die zwei Kombinationen r=1, s=l, l$\pm$l = j$\pm$1/2 nicht auftreten, so daß es in diesem Fall nur 24 unabhängige Amplituden gibt. Für I=3/2 ist nur t=1 möglich, und folglich tritt nur die halbe Anzahl (12) auf. Im Fall j=1/2, I=1/2 (Nukleon) ist noch die 1-Punktamplitude zu berücksichtigen. Dieses Ergebnis ist in Tabelle I zusammengefaßt.

Tabelle I: Anzahl der unabhängigen Amplituden des Baryonengleichungssystems

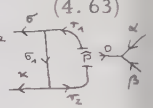
	I=1/2; t=0,1	I=3/2; t=1
$j = 1/2$ $r=0: s=\ell=j\pm 1/2$ $r=1 \quad s=\ell, \ell\pm 1 = j\pm 1/2$ $s=\ell-1 = j-1/2$	24 + 1	12
$j \geq 3/2$ $r=0: s=\ell=j\pm 1/2$ $r=1 \quad s=\ell, \ell\pm 1 = j\pm 1/2$	32	16

4.3. Spin-Ausreduktion der Bosonengleichungen

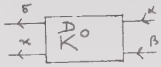
Die in 4.2. durchgeführte Ausreduktion der Baryonengleichungen kann sinngemäß sofort auf die B ehandlung der Bosonengleichungen übertragen werden.
Zunächst führen wir wieder wie oben in den Gleichungen (2.69) und (2.70) abkürzende Bezeichnungen ein:

$$\overset{D}{K}{}^{\circ}_{\sigma\kappa,\alpha\beta}(\gamma,\rho) := \frac{e^2}{4(2\pi)^4}\left[G^{\mu}(\gamma-\rho)F^{\nu}(\rho)+G^{\nu}(\rho)F^{\mu}(\gamma-\rho)\right](\bar{\sigma}_{\mu}C_{\sigma}\bar{\sigma}_{\nu}^{T})_{\sigma\kappa}C^{T}_{\sigma,\alpha\beta}$$

$$\leftrightarrow \frac{\sqrt{2}\,e^2}{2(2\pi)^4}\left[g(\gamma-\rho)f(\rho)+g(\rho)f(\gamma-\rho)\right]\sum_{\tau_1\tau_2}[\tau_1\tau_2]^{1/2}(\rho-\gamma)_{\tau_1}p^{\tau_2} \qquad (4.63)$$



$$=: \overset{D}{K}{}^{\circ}$$



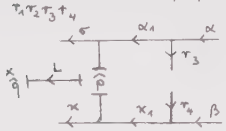
$$\overset{D}{K}_{\sigma\kappa,\alpha\beta}(\Gamma;\gamma,\rho,q) := \qquad (4.64)$$

$$= \frac{e^2}{(2\pi)^4}\sum_{\iota}\Big\{\left[2F^{\mu}(\gamma-\rho)\overset{q}{K}_{\iota}(\Gamma;\rho-q)+G^{\mu}(\gamma-\rho)\overset{b}{K}_{\iota}(\Gamma,\rho-q)\right]G^{\nu}(\rho)P_{\iota}^{\lambda\kappa}(\rho-q)(\bar{\sigma}_{\mu}\sigma_{\kappa})_{\sigma\alpha}(\bar{\sigma}_{\nu}\sigma_{\lambda})_{\kappa\beta}$$

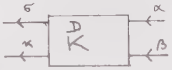
$$-\left[2F^{\nu}(\rho)\overset{q}{K}_{\iota}(\Gamma;\gamma-\rho-q)+G^{\nu}(\rho)\overset{b}{K}_{\iota}(\Gamma;\gamma-\rho-q)\right]G^{\mu}(\gamma-\rho)P_{\iota}^{\lambda\kappa}(\gamma-\rho-q)(\bar{\sigma}_{\mu}\sigma_{\lambda})_{\sigma\beta}(\bar{\sigma}_{\nu}\sigma_{\kappa})_{\kappa\alpha}$$

$$\leftrightarrow -\frac{8e^2}{(2\pi)^4}\sum_{\iota,\lambda}\Big[\left(f(\gamma-\rho)g(\rho)+g(\gamma-\rho)f(\rho)\right)\overset{q}{K}_{\iota,\lambda}(\Gamma;\rho,q)+g(\gamma-\rho)g(\rho)\overset{b}{K}_{\iota,\lambda}(\Gamma;\rho,q)\Big]\cdot$$

$$\cdot\sum_{\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4}(-)^{\tau_1+\tau_2}[\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4]^{1/2}\Big[a_{\iota}\delta_{\tau_3\tau_4}\xrightarrow{\tau_3}+b_{\iota}\sum_{K}g_{K}\,\hat{p}\xmapsto{K}\hat{q}\;F^{\tau_3}_{\tau_4}(\rho,q)\Big]\cdot$$



$$=: \overset{D}{K}$$



Dabei wurde gesetzt:

$$\overset{q,b}{K}_{\iota}(\Gamma;\rho-q) = \sum_{\lambda}\overset{q,b}{K}_{\iota,\lambda}(\Gamma;\rho,q)\,\hat{p}\xmapsto{\lambda}\hat{q}\cdot$$

$$g(\rho-q) = \sum_{K}g_{K}\cdot\hat{p}\xmapsto{K}\hat{q}\quad,\ g_{K}\equiv g_{K}(\rho,q) \qquad (4.65)$$

Und ferner:

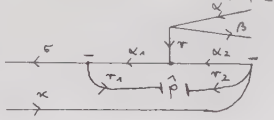
$$F^{\tau_3}{}_{\tau_4}(p,q) := p^{\tau_3}\hat{p}\,\tau_3\,p_{\tau_4}\hat{p}\,\tau_4 - p^{\tau_3}\hat{p}\,\tau_3\,q_{\tau_4}\hat{q}\,\tau_4 - p^{\tau_3}\hat{p}\,\tau_3\,q_{\tau_4}\hat{q}\,\tau_4 + q^{\tau_3}\hat{q}\,\tau_3\,q_{\tau_4}\hat{q}\,\tau_4 \qquad (4.66)$$

Weiter ist:

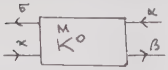
$$\overset{M}{K}{}^{o}_{\sigma\kappa,\alpha\beta}(I;\vartheta,p) := -\frac{3e^2}{8(2\pi)^4}\frac{1}{[I]}\left[G^{\tau}(\vartheta-p)F^{\nu}(p)+G^{\nu}(p)F^{\mu}(\vartheta-p)\right](\bar{\sigma}_{\mu}\sigma^{\varepsilon}\bar{\sigma}_{\nu})_{\sigma\kappa}\bar{\sigma}_{\varepsilon,\beta\alpha}$$

$$\leftrightarrow \frac{3}{2}\frac{1}{[I]}\frac{e^2}{(2\pi)^4}\left[g(\vartheta-p)f(p)+g(p)f(\vartheta-p)\right]\sum(-)^{\tau_1+\tau_2}\,[\tau_1,\tau_2,\tau,\tau]^{1/2}\times \qquad (4.67)$$

$$\times(p-\vartheta)^{\tau_1}p^{\tau_2}$$



$$=: \overset{M}{K}{}^{o}$$



$$\overset{M}{K}_{\sigma\kappa\alpha\beta}(I;\vartheta,p,q) :=$$

$$= \frac{4e^2}{(2\pi)^4}\left\{T_M^{(1)}(I)\sum_{i,L}C_i'\left[\left(g(\vartheta-p)f(p)+f(\vartheta-p)g(p)\right)\overset{q}{K}_{i,L}(I;\vartheta-p,q)+g(\vartheta-p)g(p)\overset{b}{K}_{i,L}(I;\vartheta-p,q)\right]\right.$$

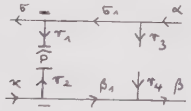
$$\times\sum_{\tau_1,\tau_2}(-)^{\tau_2}(p-\vartheta)^{\tau_1}p^{\tau_2}\,[\tau_1,\tau_2]^{1/2}$$

(4.68)

$$+T_M^{(2)}(I)\sum_{i,L}\left[\left(g(\vartheta-p)f(p)+f(\vartheta-p)g(p)\right)\overset{q}{K}_{i,L}(I;p,q)+g(\vartheta-p)g(p)\overset{b}{K}_{i,L}(I;p,q)\right]$$

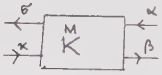
$$\times\sum_{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4}(-)^{\tau_1+\tau_2}[\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4]^{1/2}(p-\vartheta)^{\tau_1}p^{\tau_2}\left[q_i\delta_{\tau_3\tau_4}\xrightarrow{\tau_3}+b_i\sum_K g_K\hat{p}\xrightarrow{K}\hat{q}\;F^{\tau_3}{}_{\tau_4}(p,q)\right]$$

$\times$



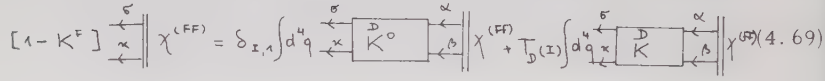
$\Big\}$

$$=:$$

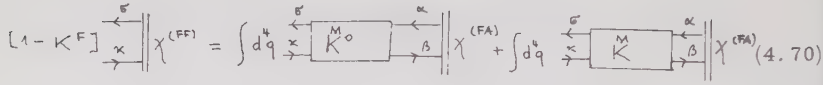


$$P_i'^{\lambda}{}_{\lambda} \equiv C_i' = \begin{cases} 1 & i=0 \\ 3 & i=1 \end{cases}$$

Damit können wir die Bosonengleichungen ebenfalls in graphischer Form schreiben:



(4.69)



(4.70)

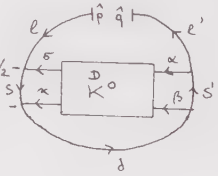
(Die Bezeichnungen "D" bzw. "M" sollen darauf hinweisen, daß es sich um mögliche Deuteronen- bzw. Mesonenzustände handeln kann.) Wir setzen jetzt die Darstellungen (4.11, 12) für die Bosonenamplituden ein, und erhalten dann folgende ausreduzierten Gleichungen:

$$[1-K^F(M,p)]\,\chi^{(FF)}_{I;j}(M;p,\ell,s) = \delta_{I,1}\sum_{\ell',s'} {}^{D}K^{\circ}_{j}(M;p;\ell,s|\ell',s')\int dq^{\circ}dq^{1}(q^{1})^{2}\,\chi^{(FF)}_{I;j}(M;q;\ell',s') \quad (4.71)$$
$$+\,T_D(I)\int dq^{\circ}dq^{1}(q^{1})^{2}\sum_{\ell',s'} {}^{D}K_{j}(I;M;p,q;\ell,s|\ell',s')\,\chi^{(FF)}_{I;j}(M;q;\ell',s')$$

$$[1-K^F(M,p)]\,\chi^{(FF)}_{I;j}(M;p;\ell,s) = \sum_{\ell',s'} {}^{M}K^{\circ}_{j}(I;M;p;\ell,s|\ell',s')\int dq^{\circ}dq^{1}(q^{1})^{2}\,\chi^{(FA)}_{I,j}(M;q,\ell',s') \quad (4.72)$$
$$+\sum_{\ell',s'}\int dq^{\circ}dq^{1}(q^{1})^{2}\,{}^{M}K_{j}(I;M;p,q;\ell,s|\ell',s')\,\chi^{(FA)}_{I;j}(M;q;\ell',s')$$

Die Kerne ergeben sich in analoger Weise wie in 4.2. Sie sind folgendermaßen definiert:

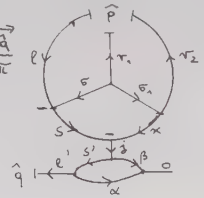
$${}^{D}K^{\circ}_{j}(M;p,\ell,s|\ell',s') := 4\pi\int\frac{d\vec{q}}{4\pi}\int\frac{d\vec{p}}{4\pi}[\ell,s,\ell',s']^{1/2}$$



(4.73)

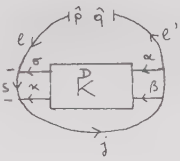
$$= -\frac{\sqrt{2}\,e^2}{(2\pi)^3}\,[\ell,\ell',s,s']^{1/2}\,[g(\mathcal{I}-p)f(p)+g(p)f(\mathcal{I}-p)]\sum_{\tau_1,\tau_2}[\tau_1,\tau_2]^{1/2}\,(p-\mathcal{I})^{\tau_1}\,p^{\tau_2}\,\times$$

$$\times\int\frac{d\hat{p}}{4\pi}\int\frac{d\hat{q}}{4\pi}$$



$$= \frac{\sqrt{2}\,e^2}{(2\pi)^3}\left[g(\mathcal{I}-p)f(p)+g(p)f(\mathcal{I}-p)\right]\delta_{j0}\,\delta_{s\,1/2}\,\delta_{\ell'0}\,\delta_{s'\,1/2}\,(-)^{\ell+1}\,(p-\mathcal{I})^{\ell}\,p^{0}$$

$$\overset{D}{K}_{j}(\mathcal{I};M;s,p,q;\ell,s|\ell',s') := 4\pi\int\frac{d\hat{q}}{4\pi}\int\frac{d\hat{p}}{4\pi}\,[\ell,s,\ell',s']^{1/2}$$

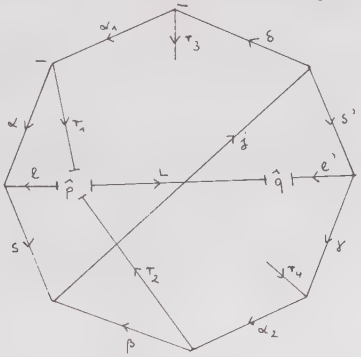


(4.74)

$$= \frac{16\,e^2}{(2\pi)^3}\sum_{i,L}\left[\left(f(\mathcal{I}-p)g(p)+g(\mathcal{I}-p)f(p)\right)\overset{q}{K}_{i,L}(\mathcal{I};p,q)+g(\mathcal{I}-p)\,g(p)\,\overset{b}{K}_{i,L}(\mathcal{I};p,q)\right]\times$$

$$\times\sum_{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4}(-)^{\tau_1+\tau_2}\,[\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4]^{1/2}\,(p-\mathcal{I})^{\tau_1}\,p^{\tau_2}\left[a_i\,\delta_{\tau_3\tau_4}\xrightarrow{\tau_3}+b_i\sum_{\kappa}g_{\kappa}\,\hat{p}^{\tau_3}\xrightarrow{\kappa}\hat{q}\,F^{\tau_3}{}_{\tau_4}(p,q)\right]$$

$$\times\int\frac{d\hat{p}}{4\pi}\int\frac{d\hat{q}}{4\pi}$$



$$= \frac{16\,e^2}{(2\pi)^3}\sum_{i,L}\left[\left(f(\mathcal{I}-p)g(p)+g(\mathcal{I}-p)f(p)\right)\overset{q}{K}_{i,L}(\mathcal{I};p,q)+g(\mathcal{I}-p)\,g(p)\,\overset{b}{K}_{i,L}(\mathcal{I};p,q)\right]\times$$

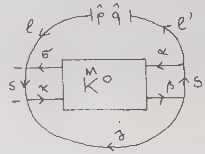
$$\times\sum_{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4}(p-\mathcal{I})^{\tau_1}\,p^{\tau_2}\left\{a_i\,\delta_{\tau_3\tau_4}\,\tilde{\mathcal{Q}}^{L}_{0j}+b_i\sum_{\kappa}g_{\kappa}\left[p^{\tau_3}p_{\tau_4}\,\tilde{\mathcal{Q}}^{LK}_{1j}+p^{\tau_3}q_{\tau_4}\,\tilde{\mathcal{Q}}^{LK}_{2j}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,q^{\tau_3}p_{\tau_4}\,\tilde{\mathcal{Q}}^{LK}_{3j}+q^{\tau_3}q_{\tau_4}\,\tilde{\mathcal{Q}}^{LK}_{4j}\right]\right\}$$

Die Ausdrücke $\mathcal{K}^{L}_{oj}(\tau_i;\ell,s|\ell',s')$, ... sind in Anhang III definiert, und ergeben sich bei Auswertung der in (4. 74) vorkommenden Graphen.

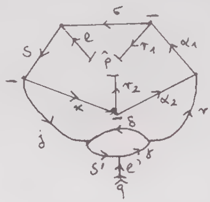
Für die "Mesonen"-Gleichung erhalten wir:

$$\overset{M}{K}{}^{o}_{j}(I;M;p;\ell,s|\ell',s') := 4\pi\int\frac{d\vec{\hat p}}{4\pi}\int\frac{d\vec{\hat q}}{4\pi}[\ell,s,\ell',s']^{1/2} \qquad (4.75)$$



$$= \frac{3}{[I]}\frac{e^2}{(2\pi)^3}\left[g(J-p)f(p)+g(p)f(J-p)\right][\ell,s,\ell',s']^{1/2}\sum_{\tau,\tau_1,\tau_2}(-)^{\tau_1+\tau_2}[\tau_1,\tau_2,\tau,\tau]^{1/2}\times$$

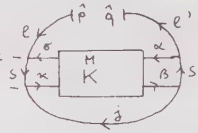
$$\times(p-J)^{\tau_1}p^{\tau_2}\int\frac{d\vec{\hat p}}{4\pi}\int\frac{d\vec{\hat q}}{4\pi}$$



$$= \frac{3}{2}\frac{1}{[I]}\frac{e^2}{(2\pi)^3}\left[g(J-p)f(p)+g(p)f(J-p)\right]\delta_{\ell'0}\,\delta_{s'1/2}\,[s,1/2]^{1/2}\sum_{\tau}(-)^{\tau-\ell}p^{\tau}\begin{Bmatrix} s & \tau & 1/2\\ 1/2 & j & 1/2\end{Bmatrix}$$

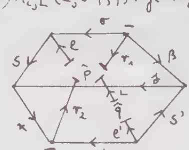
(4. 76)

$$\overset{M}{K}_{j}(I,M,p,q,\ell,s|\ell',s') := 4\pi\int\frac{d\vec{\hat p}}{4\pi}\int\frac{d\vec{\hat q}}{4\pi}[\ell,s,\ell',s']^{1/2}$$



$$= \frac{8e^2}{(2\pi)^3}[\ell,s,\ell',s']^{1/2}\Big\{T_M^{(1)}(I)\sum_{i,L}c_i^L\Big[\big(g(J-p)f(p)+f(J-p)g(p)\big)\overset{a}{K}_{i,L}(I,J-p,q)+g(J-p)g(p)\overset{b}{K}_{i,L}(I,J-p$$

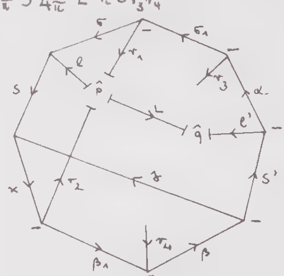
$$\times\sum_{\tau_1,\tau_2}(-)^{\tau_2}[\tau_1,\tau_2]^{1/2}(p-J)^{\tau_1}p^{\tau_2}\int\frac{d\vec{\hat p}}{4\pi}\int\frac{d\vec{\hat q}}{4\pi}$$



$$+T_M^{(2)}(I)\sum_{i,L}\Big[\big(g(J-p)f(p)+f(J-p)g(p)\big)\overset{a}{K}_{i,L}(I;p,q)+g(J-p)\,g(p)\,\overset{b}{K}_{i,L}(I;p,q)\big)\Big]\times$$

$$\times\sum_{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4}(-)^{\tau_1+\tau_2}[\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4]^{1/2}(p-J)^{\tau_1}p^{\tau_2}\int\frac{d\vec{\hat p}}{4\pi}\int\frac{d\vec{\hat q}}{4\pi}\Big[a_i\,\delta_{\tau_3\tau_4}\xrightarrow{\tau_3}+$$

$$+\,b_i\sum_K g_K\,\hat p\longmapsto^{K}\hat q\;F^{\tau_3}{}_{\tau_4}(p,q)\Big]\qquad\Big\}$$



$$= \frac{8e^2}{(2\pi)^3}\,[\ell,s,\ell',s']^{1/2}\Big\{T_M^{(1)}(I)\sum_{i,L} c_i'\Big[\big(g(\mathcal{I}-p)f(p)+f(\mathcal{I}-p)g(p)\big)K^{q}_{i,L}(I;\mathcal{I}-p,q)+g(\mathcal{I}-p)g(p)\,K^{b}_{i,L}(I;\mathcal{I}-p,q)\Big]\times$$

$$\times\sum_{\tau_1,\tau_2}(p-\mathcal{I})^{\tau_1}p^{\tau_2}\,\mathcal{J}_2^{L}\,.$$

$$+T_M^{(2)}(I)\sum_{i,L}\Big[\big(g(\mathcal{I}-p)f(p)+f(\mathcal{I}-p)g(p)\big)K^{q}_{i,L}(I;p,q)+$$

$$+g(\mathcal{I}-p)g(p)\,K^{b}_{i,L}(I;p,q)\Big]\times$$

$$\times\sum_{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4}(p-\mathcal{I})^{\tau_1}p^{\tau_2}\Big[a_i\,\delta_{\tau_3\tau_4}\mathcal{J}_1^{L}+b_i\sum_K g_K\Big(p^{\tau_3}p_{\tau_4}\,\mathcal{J}_1^{KL}$$

$$-p^{\tau_3}q_{\tau_4}\,\mathcal{J}_2^{KL}-q^{\tau_3}p_{\tau_4}\,\mathcal{J}_3^{KL}+q^{\tau_3}q_{\tau_4}\,\mathcal{J}_4^{KL}\Big)\Big]\Big\}$$

Die Graphen $\mathcal{J}_2^{L}(\tau_i;\ell,s|\ell',s')$, ... sind wieder in Anhang III aufgeführt.
Wenn man berücksichtigt, daß die Funktionen $q_i\left(\frac{p^2}{\kappa^2}\right)$ und $b_i\left(\frac{p^2}{\kappa^2}\right)$ eine im Vergleich mit g(p) wesentlich kompliziertere Gestalt haben, so ist klar, daß die angegebenen Kerne der Boso nengleichungen komplizierter sind, als die Kerne der Baryonengleichungen, was natürlich von den höheren γ_4 -Anteilen der Bosonengleichungen herstammt. Es ist jedoch zu hoffen, daß sich die aus der Drehimpulsalgebra ergebenden Auswahlregeln für L und K so auswirken werden, daß nur jeweils wenige Glieder der Entwicklungen (4.65) zu berücksichtigen sind.
Für die Anzahl der unabhängigen Amplituden bei fester Baryonenzahl überlegt man sich, daß wegen dem Kopplungsschema $((1/2,\ell)s,1/2)j$ jeweils 4 unabhängige Amplituden zu vorgegebenem Isospin I=0, 1 existieren. Eine Ausnahme bildet nur der Zustand mit j=0, wo jeweils nur 2 unabhängige Amplituden vorhanden sind. In Tabelle II ist dieses Ergebnis dargestellt.

Tabelle II: Unabhängige Amplituden der Bosonengleichungen

$j=0$	$j=1$	$j \geq 1$
$s = 1/2$	$s=1/2 \quad \ell=0,1$	$s = j \pm 1/2$
$\ell = 0,1$	$s=3/2 \quad \ell=1,2$	$\ell = s \pm 1/2$

4.4. Die "Deuteronen"-Gleichung

Zum Schluß wollen wir noch die Gleichungen für einen Zustand mit den Quantenzahlen B=2, I=0, 1 und j=0 (z. B. ein Deuteron im Spinsinglettzustand) explizit angeben. Dabei sind für die "Zwischenzustände" nach Tabelle II die Werte s=1/2 und l=0, 1 möglich. Wir erhalten aus den obigen Gleichungen, nach Auswertung der umfangreichen Ausdrücke, für diese Quantenzahlen folgendes Gleichungssystem:

j=0, s=1/2, l=0:

$$
\begin{aligned}
&[1 - K^F(M,p)]\, \chi^{(FF)}_{I;0}(M;p;0,1/2) = \\
&= \delta_{I,1}\, \overset{D}{K}{}^0_0(M;p;0,1/2\,|\,0,1/2) \int dq^0 dq^1 (q^1)^2\, \chi^{(FF)}_{I;0}(M;q;0,1/2) \\
&+ T_D(I) \int dq^0 dq^1 (q^1)^2 \Big\{ \overset{D}{K}{}_0(I,M;p,q;0,1/2\,|\,0,1/2)\, \chi^{(FF)}_{I;0}(M;q;0,1/2) \\
&\qquad + \overset{D}{K}{}_0(I;M;p,q;0,1/2\,|\,1,1/2)\, \chi^{(FF)}_{I;0}(M;q;1,1/2) \Big\}
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

j=0, s=1/2, l=1:

$$
\begin{aligned}
&[1 - K^F(M,p)]\, \chi^{(FF)}_{I;0}(M;p;1,1/2) = \\
&= \delta_{I,1}\, \overset{D}{K}{}^0_0(M;p;1,1/2\,|\,0,1/2) \int dq^0 dq^1 (q^1)^2\, \chi^{(FF)}_{I;0}(M;q;0,1/2) \\
&+ T_D(I) \int dq^0 dq^1 (q^1)^2 \Big\{ \overset{D}{K}{}_0(I;M;p,q;1,1/2\,|\,0,1/2)\, \chi^{(FF)}_{I;0}(M;q;0,1/2) \\
&\qquad + \overset{D}{K}{}_0(I,M;p,q;1,1/2\,|\,1,1/2)\, \chi^{(FF)}_{I;0}(M,q;1,1/2) \Big\}
\end{aligned}
\tag{4.78}
$$

Für die Kerne erhält man:

$$\overset{D}{K}{}^{\circ}_{0}(M;p;0,1/2\,|\,0,1/2) = -\frac{\sqrt{2}\,e^2}{(2\pi)^3}\left[g(J-p)f(p)+g(p)f(J-p)\right]p^{\circ}(p^{\circ}-M)$$

$$\overset{D}{K}{}^{\circ}_{0}(M;p;1,1/2\,|\,0,1/2) = \frac{\sqrt{2}\,e^2}{(2\pi)^3}\left[g(J-p)f(p)+g(p)f(J-p)\right]p^{\circ}p^{1} \qquad (4.79)$$

$$\overset{D}{K}_{0}(I;M;p,q;\ell,1/2\,|\,\ell',1/2) =$$

$$= \frac{16\,e^2}{(2\pi)^3}T_D(I)\sum_{i,L}\Big[\Big(g(J-p)f(p)+g(p)f(J-p)\Big)\overset{q}{K}_{i,L}(I;p,q) + \qquad (4.80)$$

$$+\,g(J-p)\,g(p)\,\overset{b}{K}_{i,L}(I;p,q)\Big]\times$$

$$\times\left[a_i\,\delta_{L,\ell'}\,\psi^{\ell\ell'}+b_i\left(g_L\,\varphi_1^{\ell\ell'}(L)+g_{L-1}\,\varphi_2^{\ell\ell'}(L)+g_{L+1}\,\varphi_3^{\ell\ell'}(L)\right)\right]$$

Dabei sind die Funktionen $\psi^{\ell\ell'},\ldots$ wie folgt definiert:

(4.81)

$$\psi^{00} = \tfrac{1}{2}(p^2-Mp^{\circ}) \qquad \psi^{01} = -\tfrac{1}{6}Mp^{1}$$

$$\psi^{10} = -\tfrac{1}{2}Mp^{1} \qquad \psi^{11} = \tfrac{1}{6}(p^2-Mp^{\circ})$$

$$\varphi_1^{00}(L) = \frac{1}{4\sqrt{2}\,[L]}\Big\{\left[2+(-)^{L+1}\sqrt{2}\right]p^{\circ}p^2+2\sqrt{2}\,(-)^{L}Mp^2+\left[2+(-)^{L}\sqrt{2}\right]M^2p^{\circ}-4Mp^{\circ 2}$$

$$+\left[2\sqrt{3}+(-)^{L}\sqrt{2}\right](p^1)^3\Big\}q^{\circ}$$

$$-\frac{1}{4[L]}(p^2-Mp^{\circ})\,q^2$$

$$\varphi_1^{01}(L) = \frac{1}{4\sqrt{2}\,[L]}\Big\{\left[2-\sqrt{2}\right]p^{\circ}p^2+\sqrt{2}\,Mp^2-(4-\sqrt{2})Mp^{\circ 2}-(2-\sqrt{2})M^2p^{\circ}-$$

$$-\sqrt{2}\,p^{\circ}(p^1)^2+(2\sqrt{3}+2\sqrt{2})(p^1)^3\Big\}q^{1}$$

$$\varphi_1^{10}(L) = \frac{1}{4\sqrt{2}\,[L]}\Big\{[2\sqrt{3}+(-)^{L+1}\sqrt{2}\,]\,p^1p^2 - 4\sqrt{3}\,M p^0p^1 + [\,2\sqrt{3}+(-)^L\sqrt{2}\,]\,M^2p^1 - [2\sqrt{3}+(-)^{L+1}\sqrt{2}\,]\,p^0(p^0$$
$$+ [\,2\sqrt{3}+(-)^{L+1}\,]\,M\,(p^1)^2\Big\}\,q^0$$
$$+ \frac{1}{4\,[L]}\,M p^1 q^2$$
$$+ \frac{(-)^L}{4\,[L]}\Big[(p^0-M)(p^0+(-)^{L+1}p^1) - p^0p^1\Big](p-\mathcal{J})^2$$

$$\varphi_1^{11}(L) = \frac{1}{4\sqrt{2}\,[L]}\Big\{[2\sqrt{3}+\sqrt{2}\,]\,p^1p^2 - 4\sqrt{3}\,M p^0p^1 - [2\sqrt{3}+\sqrt{2}\,]\,p^0(p^1)^2 + [2\sqrt{3}-\sqrt{2}\,]\,M^2p^1 +$$
$$+ [\,2\sqrt{3}+\sqrt{2}\,]\,M\,(p^1)^2\Big\}\,q^1$$

$$\varphi_2^{00}(L) = \frac{L}{4\sqrt{2}\,[L,L-1]}\Big\{-[2\sqrt{3}+(-)^{L+1}\sqrt{2}\,]\,p^1p^2 + [2\sqrt{3}+(-)^{L+1}\sqrt{2}\,]\,p^0(p^1)^2 + [2\sqrt{3}+(-)^L\sqrt{2}\,]\,M\,(p^1)^2$$
$$+ 2\sqrt{3}\,M p^0p^1 + [2\sqrt{3}+(-)^L\sqrt{2}\,]\,M^2p^1\Big\}\,q^1$$

$$\varphi_2^{01}(L) = \frac{L}{4\sqrt{2}\,[L,L-1]}\Big\{-[2\sqrt{3}-\sqrt{2}\,]\,p^1p^2 - [2\sqrt{2}-\sqrt{3}\,]\,M p^0p^1 - [2\sqrt{2}+\sqrt{3}\,]\,(p^1)^2(p^0-M)$$
$$+ [\sqrt{2}\,p^{02} - \sqrt{3}\,M^2]\,p^1\Big\}\,q^0$$
$$+ \frac{(-)^{L+1}\sqrt{L}}{4\,[L,L-1]^{3/2}}(p-\mathcal{J})^2\Big\{p^1\big[(-)^{L+1}p^0 - (p^0-M)\big] + (p^1)^2\Big\}$$
$$- \frac{L}{4\,[L,L-1]}\,M p^1 q^2$$

$$\varphi_2^{10}(L) = \frac{L}{4\sqrt{2}\,[L,L-1]}\Big\{-[2+(-)^{L+1}\sqrt{2}\,]\,p^0p^2 + [2\sqrt{3}+(-)^L\sqrt{2}\,]\,M\,(p^1)^2 + [4+(-)^{L+1}\sqrt{2}\,]\,M p^{02}$$
$$- [2+(-)^{L+1}\sqrt{2}\,]\,M^2p^0 + (-)^{L+1}\sqrt{2}\,M p^2 + [2\sqrt{3}+(-)^{L+1}\sqrt{2}\,]\,p^{02}p^1$$
$$- [4\sqrt{3}+(-)^{L+1}2\sqrt{2}\,]\,M p^0p^1 + [2\sqrt{3}+(-)^{L+1}\sqrt{2}\,]\,M^2p^1\Big\}\,q^1$$

$$\varphi_2^{11}(L) = \frac{L}{4\sqrt{2}\,[L,L-1]}\Big\{-[2+\sqrt{2}\,]\,p^0p^2 + [2\sqrt{3}+\sqrt{2}\,]\,p^{02}p^1 + \sqrt{2}\,M p^2 + [4+\sqrt{2}\,]\,M p^{02}$$
$$- [4\sqrt{3}+2\sqrt{2}\,]\,M p^0p^1 - [2+\sqrt{2}\,]\,M^2p^0 - \sqrt{2}\,M(p^1)^2 + [2\sqrt{3}+\sqrt{2}\,]\,M^2p^1\Big\}\,q$$
$$+ \frac{L}{4\,[L,L-1]}\,[p^2 - M p^0]\,q^2$$
$$+ \frac{(-)^{L+1}\sqrt{L}}{4\,[L,L-1]^{3/2}}\Big\{p^0\big[-p^1 + (p^0-M)\big] + (-)^L(p^1)^2\Big\}(p-\mathcal{J})^2$$

$$\varphi_3^{00}(L) = \frac{L+1}{4\sqrt{2}\,[L,L+1]} \Big\{ -\left[2\sqrt{3}+(-)^L\sqrt{2}\right] p^1 p^2 + \left[2\sqrt{3}+(-)^L\sqrt{2}\right] p^0 (p^1)^2 + \left[2\sqrt{3}+(-)^{L+1}\sqrt{2}\right] M (p^1)^2$$
$$+ 2\sqrt{3}\, M p^0 p^1 + \left[2\sqrt{3}+(-)^{L+1}\sqrt{2}\right] M^2 p^1 \Big\} q^1$$

$$\varphi_3^{01}(L) = \frac{L+1}{4\sqrt{2}\,[L,L+1]} \Big\{ -\left[2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right] p^1 p^2 - \left[2\sqrt{2}-\sqrt{3}\right] M p^0 p^1 - \left[2\sqrt{2}+\sqrt{3}\right] (p^1)^2 (p^0-M)$$
$$+ \left[\sqrt{2}\, p^{0\,2} - \sqrt{3}\, M^2\right] p^1 \Big\} q^0$$
$$+ \frac{(-)^L\sqrt{L+1}}{4\,[L,L+1]^{1/2}} (p-\mathfrak{I})^2 \Big\{ p^1 \left[(-)^{L+1} p^0 - (p^0-M)\right] + (p^1)^2 \Big\}$$
$$- \frac{L+1}{4\,[L,L+1]}\, M p^1 q^2$$

$$\varphi_3^{10}(L) = \frac{L+1}{4\sqrt{2}\,[L,L+1]} \Big\{ -\left[2+(-)^{L+1}\sqrt{2}\right] p^0 p^2 + \left[2\sqrt{3}+(-)^L\sqrt{2}\right] M (p^1)^2 + \left[4+(-)^{L+1}\sqrt{2}\right] M p^{0\,2}$$
$$- \left[2+(-)^{L+1}\sqrt{2}\right] M^2 p^0 + (-)^{L+1}\sqrt{2}\; M p^2 + \left[2\sqrt{3}+(-)^{L+1}\sqrt{2}\right] p^{0\,2} p^1$$
$$- \left[4\sqrt{3}+(-)^{L+1}2\sqrt{2}\right] M p^0 p^1 + \left[2\sqrt{3}+(-)^{L+1}\sqrt{2}\right] M^2 p^1 \Big\} q^1$$

$$\varphi_3^{11}(L) = \frac{L+1}{4\sqrt{2}\,[L,L+1]} \Big\{ -\left[2+\sqrt{2}\right] p^0 p^2 + \left[2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right] p^{0\,2} p^1 + \sqrt{2}\, M p^2 + \left[4+\sqrt{2}\right] M p^{0\,2}$$
$$- \left[4\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right] M p^0 p^1 - \left[2+\sqrt{2}\right] M^2 p^0 - \sqrt{2}\, M (p^1)^2 +$$
$$+ \left[2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right] M^2 p^1 \Big\} q^0$$
$$+ \frac{L+1}{4\,[L,L+1]} (p^2 - M p^0)\, q^2$$
$$+ \frac{(-)^L\sqrt{L+1}}{4\,[L,L+1]^{1/2}} \Big\{ p^0 \left[-p^1 + (p^0-M)\right] + (-)^L (p^1)^2 \Big\} (p-\mathfrak{I})^2$$

Anhang I: Zur Definition von Funktionalen auf Fermifeldern [28].

Bei der funktionalen Formulierung der nichtlinearen Spinortheorie der Elementarteilchen ist es, im Gegensatz zum Modell des anharmonischen Oszillators [16, 17], wo Bosefelder verwendet werden, notwendig, als äußere Quellen antikommutierende spinorielle Fermifelder $j_\alpha(x)$ zu verwenden. (Wie schon im Text verwendet wurde, kann α ein n-Tupel von Indizes $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ bedeuten, und x die Raum-Zeit-Koordinate.) Wegen der Antivertauschungsregeln

$$\{ j_\alpha(x), j_\beta(y) \} = 0 \tag{I. 1}$$

ist klar, daß die $j_\alpha(x)$ keine c-Zahlen sind, sondern Operatoren. Sie sind die (unendlich vielen) Erzeugenden einer GRASSMANN-Algebra [29]. Dieser für die Feldtheorie wegen der Möglichkeit einer funktionalen Darstellung interessante mathematische Begriff, soll hier kurz erläutert werden.
Allgemein kann eine derartige GRASSMANN-Algebra $\mathbb{G}$ als direkte Summe von abzählbar unendlich vielen linearen topologischen Räumen E^n dargestellt werden:

$$\mathbb{G} = \sum_{n=0}^{\infty} \oplus E^n \tag{I. 2}$$

Die E^n sind nicht notwendig vollständig. Ihre Elemente werden mit $f_\nu \in E^\nu$ bezeichnet. $\mathbb{G}$ heißt GRASSMANN-Algebra, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1. E^0 ist ein eindimensionaler linearer Raum mit dem Basiselement f_0.

2. Für jedes $f_p \in E^p$, $g_q \in E^q$ ist das Produkt $f_p g_q \in E^{p+q}$ definiert, und es gilt:
   a) $f = \alpha f_0 \in E^0$, $\alpha \in \mathbb{C}$; $g_q \in E^q$ $\Rightarrow$ $f g_q = \alpha g_q$
   b) $f_p g_q = (-)^{pq} g_q f_p$
   c) Seien $f_1, \ldots, f_n \in E^1$, l.u. $\Rightarrow$ $f_{i_1}, \ldots, f_{i_p} \in E^p$, l.u. wo $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$
   d) Endliche Linearkombinationen von Elementen der Form $f_p g_q$, $f_p \in E^p$, $g_q \in E^q$, liegen dicht bezüglich der Topologie von E^{p+q}.

3. Sei $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$, $g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n$, $f_n, g_n \in E^n$, so ist definitorisch:

$$fg := \sum_{n=0}^{\infty} h_n, \quad \text{wo } h_n := \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k}$$

und $\mathbb{G}$ ist bezüglich dieser Multiplikation abgeschlossen.

Da $\mathfrak{G}$ unendlich viele Erzeugende haben soll, kann E^1 nicht endlichdimensional sein.
Wir können in $\mathfrak{G}$ ein Skalarprodukt einführen. Dazu fordern wir für die Teilräume E^n folgende Eigenschaften:

1. Es existiert eine Teilmenge $\tilde{E}^n \subset E^n$, mit den Eigenschaften:

   a) $\tilde{E}^n$ ist ein linearer topologischer Raum,

   b) $\tilde{E}^n$ liegt dicht in E^n bezüglich der Topologie von E^n.

2. Für jedes $f \in E^n$ und $f \in \tilde{E}^n$ ist ein Skalarprodukt (f_n, f) definiert, welches ein stetiges lineares Funktional auf $\tilde{E}^n$ ist. Es gilt $(f, f) \geq 0$, und $(f, f)=0$ genau für $f=0$.

3. Die Topologie von E^n ist die Topologie des zu $\tilde{E}^n$ konjugierten Raumes.

4. Die Abschließung von $\tilde{E}^n$ durch das Skalarprodukt liegt in E^n und wird mit H^n bezeichnet. H^n ist ein Hilbertraum. Das Raumtripel $\tilde{E}^n \subset H^n \subset E^n$ heißt oft GEL´FANDsches Raumtripel [30].

5. Wenn $f_1, \ldots, f_{\ldots}, \ldots \in H^1$ eine Orthonormalbasis in H^1 ist, dann ist $\{f_{i_1}, \ldots f_{i_n}$ mit $i_1 < \ldots\ldots < i_n\}$ eine Orthonormalbasis in H^n.

Sei M eine messbare Menge von Elementen $x \in M$, und $L_2(M)$ der Raum der auf M quadratintegrablen Funktionen $\varphi(x)$. Sei weiter j eine isometrische Abbildung von $L_2(M)$ auf H^1:

$$j: L_2(M) \longrightarrow H^1 \quad \text{wo } \varphi(x) \rightsquigarrow j(\varphi) \in H^1, \quad (j(\varphi), j(\varphi)) = \int_M |\varphi(x)|^2 \, dx$$

die wir als lineares Funktional schreiben können:

$$j(\varphi) = \int j(x) \, \varphi(x) \, dx \tag{I. 3}$$

(Im allgemeinen brauchen die $j(x)$ nicht in H^1 zu liegen. Sie sind jedoch verallgemeinerte Eigenfunktionen der selbstadjungierten Operatoren in H^1 [30].)
Wegen der Isometrie gilt:

$$(j(x), j(y)) = \delta(x, y) \tag{I. 4}$$

wo $\delta(x, y)$ die DIRACsche Deltafunktion auf M ist.

Die j(x) heißen die Erzeugenden von $\mathfrak{G}$, und bilden eine Orthonormalbasis in H^1 und damit die aus ihnen gebildeten Monome eine Orthonormalbasis in H^n.
Wir führen die Bezeichnungen ein:

$\tilde{E}^1(M) := \{ \varphi \in L_2(M): j(\varphi) \in \tilde{E}^1 \}$, $\varphi \in \tilde{E}^1(M)$ heißt Basisfunktion

$\tilde{E}^{1\prime}(M) :=$ Raum der stetigen Funktionale auf $\tilde{E}^1(M)$.

$\tilde{E}^{1\prime} :=$ Raum der stetigen Funktionale auf $\tilde{E}^1$.

Die Abbildung $j: \tilde{E}^1(M) \to \tilde{E}^1$ kann stetig auf die Abbildung $j: \tilde{E}^{1\prime}(M) \to \tilde{E}^{1\prime}$ fortgesetzt werden. Daraus folgt, daß jedes $f \in E^1$ als lineares Funktional darstellbar ist in der Form:

$$f = \int j(x)\, \varphi(x)\, dx \qquad (I.5)$$

wobei gilt

1. $f \in \tilde{E}^1 \rangle \varphi(x) \in \tilde{E}^1(M) \subset L_2(M)$

2. $f \in H^1 \rangle \varphi(x) \in L_2(M)$

3. $f \in E^1 \rangle \varphi(x) \in E^1(M)$

Damit ist jedes Element $f_n \in E^n$ darstellbar als:

$$f_n = \int j(x_1) \cdot \ldots \cdot j(x_n)\, \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, d^n x$$

wo φ eine antisymmetrische Distribution ist. (Speziell für $f_n \in H^n$ ist φ eine quadratintegrable Funktion von n Variablen.) Da nach (I. 2) für jedes $f \in \mathfrak{G}$ geschrieben werden kann:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n, \quad f_n \in E^n$$

so folgt:

$$f = f(j) = \sum_{n=0}^{\infty} \int \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, j(x_1) \ldots j(x_n)\, d^n x \qquad (I.6)$$

d.h. f kann als Funktional in j dargestellt werden.
Wenn man in $\mathfrak{G}$ eine Funktionalableitung einführen will, so gibt es zwei verschiedene Wege.
Man kann zunächst festlegen, wie die Funktionalableitung auf die Monome einer Basis von links und rechts wirkt:

$$\frac{\delta}{\delta j(x)} j(x_1)\dots j(x_n) = \delta(x,x_1) j(x_2)\dots j(x_n) - \delta(x,x_2) j(x_1) j(x_3)\dots j(x_n) \pm \dots$$

$$+ (-)^{n-1} \delta(x,x_n) j(x_1)\dots j(x_{n-1}) \qquad (I.7)$$

$$j(x_1)\dots j(x_n) \frac{\delta}{\delta j(x)} = \delta(x,x_n) j(x_1)\dots j(x_{n-1}) - \delta(x,x_{n-1}) j(x_1)\dots j(x_{n-2}) j(x_n) \qquad (I.8)$$

$$\pm \dots + (-)^{n-1} \delta(x,x_1) j(x_2)\dots j(x_n)$$

Dann ist nach (I.6) die Funktionalableitung für jedes $f \in \mathfrak{G}$ bestimmbar. Eine andere Möglichkeit ist der Weg des Koeffizientenvergleichs. Sei $f(j)$ ein Funktional der Form (I.6). Dann entwickeln wir $f(j+h)$ in eine VOLTERRA-Reihe:

$$f(j+h) = f(j) + \int h(x) \frac{\delta}{\delta j(x)} f(j)\, dx + \dots \qquad (I.9)$$

Durch Vergleich der beiden Seiten von (I.9) kann dann $\frac{\delta}{\delta j(x)} f(j)$ bestimmt werden.

Nach der Funktionaldifferentiation ist es noch nützlich, einen Integral begriff für Funktionale einzuführen. Dazu wird zunächst das Integral auf endlichdimensionalen Unterräumen der GRASSMANN-Algebra definiert und anschließend zur Grenze übergegangen.

Wir betrachten in E^1 eine Folge von 2n-dimensionalen Unterräumen F_n derart, daß $E^1 = \bigcup_{n=0} F_n$ gilt. In F_n führen wir eine Orthonormalbasis $j_1, \dots, j_{2n}$ ein, wobei gilt:

$$\{j_i, j_k\} = 0, \quad j_i^2 = 0 \qquad (i,k = 1, \dots, 2n)$$

Weiter gelte für die Symbole dj_i:

$$\{dj_i, dj_k\} = \{j_i, dj_k\} = 0 \qquad (i,k = 1, \dots 2n)$$

Dann definieren wir das Integral in F_n als Integral über Differentialformen. Es gelte:

$$\int dj_i = 0, \quad \int j_i\, dj_i = 1, \quad (i = 1, \dots, 2n)$$

Sei nun $f(j) \in \mathfrak{G}$ und $f_n(j)$ der Wert von $f(j)$ auf F_{2n}, der mit (I.6) durch

$$f_n(j) := \sum_p \sum_{k_s \le 2n} \varphi(k_1, \dots, k_p)\, j_{k_1} \dots j_{k_p}$$

definiert ist. Dann definiert man als Integral von f:

$$I(f) := \lim_{n\to\infty} I_n(f_n) =: \int f(j) \prod dj \qquad (I.10)$$

wo ist:

$$I_n(f_n) := \int_{F_n} f_n(j)\, dj_1 \dots dj_{2n}$$

$I_n(f_n)$ hängt nicht von der speziellen Wahl der Basis ab. Wenn es ebenfalls nicht auch von der Wahl der F_n abhängt, so heißt $I(f)$ das Funktionalintegral von f über $\mathfrak{G}$.
Für spinorielle Quellen behalten die obigen Ausführungen ihre Gültigkeit.
Für die Anwendungen ist es nützlich, ein spezielles Integral zu berechnen .
Sei A ein Operator in E^1 für dessen Darstellung gilt:

$$A_{\alpha\beta}(x,y) = - A_{\beta\alpha}(y,x)$$

Und sei ferner $(j,j)_A$ durch :

$$(j,j)_A := \int j_\alpha(x) A_{\alpha\beta}(x,y) j_\beta(y)\, dx\, dy$$

definiert. Dann ergibt sich für das sog. GAUSS-Integral:

$$I := \int \exp\left\{\tfrac{1}{2}(j,j)_A\right\} \Pi dj = \left(\det A_{\alpha\beta}\right)^{1/2} \qquad (I.\ 11)$$

Dabei ist $\det(A_{\alpha\beta})$ eine verllgemeinerte FREDHOLM-Determinante [28] .
Im Spezialfall $A = \mathbb{1}$ folgt $I = 1$.
Im Text wurden als Basisfunktionale zur Darstellung der Funktionale f(j) nach (I . 6) die sog. HERMITE-Funktionale benutzt. Zunächst definieren wir die HERMITE - Polynomiale $HP_n(j)$ durch:

$$HP_n(j) := (-)^n e^{\frac{1}{2}(j,j)_A} \left\{ P_n\left(\frac{\delta}{\delta j}\right) e^{-\frac{1}{2}(j,j)_A} \right\} \qquad (I.\ 12)$$

Dabei ist:

$$P_n\left(\frac{\delta}{\delta j}\right) := \prod_{k=1}^{n} \frac{\delta}{\delta j_{\alpha_k}(x_k)}$$

Und aus der Definition der Funktionalableitung nach (I . 7, 8) gelten die Vertauschungsregeln:

$$\left\{\frac{\delta}{\delta j_\alpha(x)}, \frac{\delta}{\delta j_\beta(y)}\right\} = 0, \quad \left\{\frac{\delta}{\delta j_\alpha(x)}, j_\beta(y)\right\} = \delta_{\alpha\beta}\delta(x,y) \qquad (I\ .\ 13)$$

Wenn man ferner noch durch:

$$\frac{\delta}{\delta j_\alpha(x)} =: \int dy\, A_{\alpha\beta}(x,y) \frac{\delta^{(A)}}{\delta j_\beta(y)}$$

einen transformierten Operator der Funktionalableitung definiert , wobei ist

$$\left(h, \frac{\delta^{(A)}}{\delta j}\right)_A (j,j)_A = 2(h,j)_A$$

so kann man für die $HP_n(j)$ auch schreiben:

$$HP_n\left(\begin{matrix}x_1\cdots x_n\\ \alpha_1\cdots\alpha_n\end{matrix}, j\right) = (-)^n e^{\frac{1}{2}(j,j)_A}\left\{\prod_{k=1}^{n}\int dy_k\, A_{\alpha_k\beta_k}(x_k,y_k)\frac{\delta^{(A)}}{\delta j_{\beta_k}(y_k)}\right\} e^{-\frac{1}{2}(j,j)_A}$$

Durch vollständige Induktion nach n kann man sofort zeigen:

$$(-)^n e^{\frac{1}{2}(j,j)_A} P_n\left(\frac{\delta^{(A)}}{\delta j}\right) e^{-\frac{1}{2}(j,j)_A} = P_n\left(j - \frac{\delta^{(A)}}{\delta j}\right)\cdot 1\!\!1$$

Wir können jetzt die HERMITE-Funktionale $\mathfrak{J}_n(j)$ mittels der Polynomiale $HP_n(j)$ definieren. Sie sind gegeben durch:

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}_n\left(\begin{matrix}x_1\cdots x_n\\ \alpha_1\cdots\alpha_n\end{matrix}, j\right) &:= \frac{1}{\sqrt{n!}}\, e^{-\frac{1}{4}(j,j)_A}\, HP_n\left(\begin{matrix}x_1\cdots x_n\\ \alpha_1\cdots\alpha_n\end{matrix}, j\right)\\ &= \frac{(-)^n}{\sqrt{n!}}\, e^{\frac{1}{4}(j,j)_A}\, P_n\left(\frac{\delta}{\delta j}\right) e^{-\frac{1}{2}(j,j)_A}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n!}}\left[\prod_{k=1}^{n}\int dy_k\, A_{\alpha_k\beta_k}(x_k,y_k)\right] e^{-\frac{1}{4}(j,j)_A} P_n\left(j - \frac{\delta^{(A)}}{\delta j}\right)\cdot 1\!\!1\end{aligned} \qquad \text{(I. 14)}$$

Mit Hilfe der angegebenen Definitionen und leicht zu beschaffenden Rechenregeln kann man sofort nachweisen, daß die HERMITE-Funktionale orthogonal sind:

$$\int \pi\, dj\; \mathfrak{J}_m\left(\begin{matrix}x_1\cdots x_m\\ \alpha_1\cdots\alpha_m\end{matrix}, j\right)\mathfrak{J}_m\left(\begin{matrix}y_1\cdots y_m\\ \beta_1\cdots\beta_m\end{matrix}, j\right) = \delta_{mn}\frac{(-)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n!}\det\left(A_{\alpha_i\beta_k}\right)\mathfrak{N}_0(A) =: \langle \mathfrak{J}_m \mid \mathfrak{J}_m\rangle$$

$$\mathfrak{N}_0(A) := \langle \mathfrak{J}_0 \mid \mathfrak{J}_0\rangle$$

Im Text ist es nicht notwendig, $\mathfrak{N}_0(A)$ zu kennen, da es aus den Gleichungen herausgekürzt werden kann.
Für die HERMITE-Funktionale bestehen die Rechenregeln:

$$\begin{aligned}j_\alpha(x)\,\mathfrak{J}_m\left(\begin{matrix}x_1\cdots x_m\\ \alpha_1\cdots\alpha_m\end{matrix}, j\right) &= (-)^m\sqrt{m+1}\int dy\, A^{-1}_{\alpha\beta}(x,y)\,\mathfrak{J}_{m+1}\left(\begin{matrix}x_1\cdots x_m\, y\\ \alpha_1\cdots\alpha_m\beta\end{matrix}, j\right)\\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{\ell=1}^{m}(-)^\ell\,\delta_{\alpha\alpha_\ell}\,\delta(x,x_\ell)\,\mathfrak{J}_{m-1}\left(\begin{matrix}\frac{1}{\ell}\, x_1\cdots x_m\\ \alpha_1\cdots\alpha_m\end{matrix}, j\right)\end{aligned} \qquad \text{(I. 15)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\delta}{\delta j_\alpha(x)}\,\mathfrak{J}_m\left(\begin{matrix}x_1\cdots x_m\\ \alpha_1\cdots\alpha_m\end{matrix}, j\right) &= \frac{(-)^{m+1}}{2}\sqrt{m+1}\;\mathfrak{J}_{m+1}\left(\begin{matrix}x_1\cdots x_m\, y\\ \alpha_1\cdots\alpha_m\,\beta\end{matrix}, j\right)\\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{m}}\sum_{\ell=1}^{m}(-)^\ell A_{\alpha\alpha_\ell}(x,x_\ell)\,\mathfrak{J}_{m-1}\left(\begin{matrix}\frac{1}{\ell}\, x_1\cdots x_m\\ \alpha_1\cdots\alpha_m\end{matrix}, j\right)\end{aligned} \qquad \text{(I. 16)}$$

wobei ist:

$$\left(\begin{matrix}\frac{1}{\ell}\, x_1\cdots x_m\\ \alpha_1\cdots\alpha_m\end{matrix}, j\right) := \left(\begin{matrix}x_1\cdots x_{\ell-1}\, x_{\ell+1}\cdots x_m\\ \alpha_1\cdots\alpha_{\ell-1}\,\alpha_{\ell+1}\cdots\alpha_m\end{matrix}, j\right)$$

Anhang II: Unsymmetrisierte HERMITE-Gleichungen in niedrigster Näherung

Um den Vergleich mit früher durchgeführten Rechnungen am φ -Gleichungssystem [1, 2] zu erleichtern, ist es nützlich, die sich aus (1.63) und (1.70) in niedrigster Näherung für Fermionen und Bosonen ergebenden Gleichungen zu diskutieren, wobei sich im symmetrisierten Fall in dieser Näherung die gleichen Ergebnisse gewinnen lassen wie im unsymmetrisierten Fall. Daher wird hier nur der letzte Fall behandelt.

II. 1. Niedrigste Fermionennäherung

Wenn wir in (1.63) n die Werte 0 und 2 annehmen lassen, so folgt im Ortsraum das Gleichungssystem:

$$\chi_1\left(\begin{smallmatrix}\bar{x}\\ \bar{\alpha}\end{smallmatrix}\right) = \tfrac{1}{4} V_{\alpha\beta\gamma\delta} \int d^4x\; G_{\bar{\alpha}\alpha}(\bar{x}-x)\; \chi_3\left(\begin{smallmatrix}x & x & x\\ \beta & \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \tag{II. 1}$$

$$\begin{aligned}\chi_3\left(\begin{smallmatrix}\bar{x} & x_1 & x_2\\ \bar{\alpha} & \alpha_1 & \alpha_2\end{smallmatrix}\right) = -2 \Big\{ & F_{\alpha_1\bar{\alpha}}(x_1-\bar{x})\,\chi_1\left(\begin{smallmatrix}x_2\\ \alpha_2\end{smallmatrix}\right) - F_{\alpha_2\bar{\alpha}}(x_2-\bar{x})\,\chi_1\left(\begin{smallmatrix}x_1\\ \alpha_1\end{smallmatrix}\right)\Big\}\\ - V_{\alpha\beta\gamma\delta} \int d^4x\, G_{\bar{\alpha}\alpha}(\bar{x}-x) \Big\{ & 6\, F_{\alpha_1\beta}(x_1-x)\, F_{\alpha_2\gamma}(x_2-x)\,\chi_1\left(\begin{smallmatrix}x\\ \delta\end{smallmatrix}\right) +\\ + \tfrac{3}{2}\Big[& F_{\alpha_1\beta}(x_1-x)\,\chi_3\left(\begin{smallmatrix}x & x & x_2\\ \gamma & \delta & \alpha_2\end{smallmatrix}\right) - F_{\alpha_2\beta}(x_2-x)\,\chi_3\left(\begin{smallmatrix}x & x & x_1\\ \gamma & \delta & \alpha_1\end{smallmatrix}\right)\Big] \qquad \text{(II. 2)}\\ - \tfrac{1}{4}\, & \chi_5\left(\begin{smallmatrix}x & x & x & x_1 & x_2\\ \beta & \gamma & \delta & \alpha_1 & \alpha_2\end{smallmatrix}\right) \Big\}\end{aligned}$$

Die niedrigste denkbare Näherung besteht darin, χ_3 und χ_5 identisch Null zu setzen. Das liefert aber offensichtlich nur die triviale Lösung, d.h. $\chi_1 \equiv 0$. Die niedrigste nichttriviale Näherung ergibt sich, wenn man $\chi_5 \equiv 0$ setzt, und für χ_3 in (II. 2) nur die χ_1 -Anteile auf der rechten Seite berücksichtigt. Dann ergibt das Einsetzen in (II. 1) im Impulsraum die Eigenwertgleichung:

$$\left[\delta_{\alpha\beta} - K^F_{\alpha\beta}(3)\right] \chi_1\left(\begin{smallmatrix}\tilde{\jmath}\\ \beta\end{smallmatrix}\right) = 0 \tag{II. 3}$$

wo $\mathfrak{J}$ der Viererimpuls des Fermions ist. K^F ist der Fermionen-eigenwertoperator, für den man explizit erhält:

$$K^F(\mathfrak{J}) := \frac{3}{2}\left(\frac{e^2}{2}\right)^2 [\lambda_2^1 \bar{\sigma}_\mu^1 \frac{\mathfrak{J}^\mu}{\mathfrak{J}^2}] V_i [\lambda_2^1 \bar{\sigma}_\lambda^1] V_j [\lambda_2^1 \bar{\sigma}_\nu^1] V_i [\lambda_2^1 \bar{\sigma}_\varkappa^1] V_j \cdot$$
$$\cdot \int \frac{d^4q\, d^4q'}{(2\pi)^8} \frac{\varkappa^4 q^\nu}{(q^2)^2(q^2-\varkappa^2)} \frac{\varkappa^4 q'^\varkappa}{(q'^2)^2(q'^2-\varkappa^2)} \frac{(\mathfrak{J}-q-q')^\lambda}{(\mathfrak{J}-q-q')^2} \qquad \text{(II. 4)}$$
$$= \frac{1}{4}\frac{3}{32}\left(\frac{\varkappa\ell}{2\pi}\right)^4 \frac{\mathfrak{J}^\mu}{\mathfrak{J}^2} [\lambda_2^1 \bar{\sigma}_\mu^1 V_i \lambda_2^1 \bar{\sigma}_\lambda^1 V_j \lambda_2^1 \bar{\sigma}_\nu^1 V_i \bar{\sigma}_\varkappa^1 V_j] L^{\nu\varkappa\lambda}(\mathfrak{J})$$

Dabei wurde gesetzt:

$$L^{\nu\varkappa\lambda}(\mathfrak{J}) := \frac{\varkappa^4}{\pi^4} \int d^4q\, d^4q' \frac{q^\nu q'^\varkappa (\mathfrak{J}-q-q')^\lambda}{(q^2)^2(q^2-\varkappa^2)(q'^2)^2(q'^2-\varkappa^2)(\mathfrak{J}-q-q')^2} \qquad \text{(II. 5)}$$

Da ferner ist:

$$[\lambda_2^1 \bar{\sigma}_\mu^1 V_i \lambda_2^1 \bar{\sigma}_\lambda^1 V_j \lambda_2^1 \bar{\sigma}_\nu^1 V_i \bar{\sigma}_\varkappa^1 V_j] = \frac{16}{3} \bar{\sigma}_\mu^1 [\sigma_\lambda^1 g_{\nu\varkappa} + \sigma_\nu^1 g_{\lambda\varkappa} + \sigma_\varkappa^1 g_{\lambda\nu}] \qquad \text{(II. 6)}$$

folgt schließlich:

$$K^F(\mathfrak{J}) = \frac{1}{4}\frac{3}{2}\left(\frac{\varkappa\ell}{2\pi}\right)^4 \bar{\sigma}_\mu^1 \mathfrak{J}^\mu \sigma_\nu^1 L^{\nu\lambda}{}_\lambda(\mathfrak{J})$$
$$= -\frac{1}{4}\frac{3}{2}\left(\frac{\varkappa\ell}{2\pi}\right)^4 \frac{\mathfrak{J}_\mu}{\mathfrak{J}^2} L^{\mu\lambda}{}_\lambda(\mathfrak{J}) \qquad \text{(II. 7)}$$

Dieses Ergebnis stimmt bis auf den Faktor 1/4 mit dem in [2] erhaltenen Resultat überein. Der Wert, den man damit für $\varkappa\ell$ erhält, ist um den Faktor $\sqrt{2}$ zu groß. Da jedoch in der Spinortheorie nur Massenverhältnisse berechnet werden können, was ein Ausdruck des Fehlens eines der Natur immanenten Massenmaßstabes ist, benötigen wir noch eine weitere unabhängige Rechnung, um die Ergebnisse wirklich mit den früheren vergleichen zu können.

II. 2. Niedrigste Bosonennäherung

Im Gegensatz zu den Verhältnissen bei den Fermionen liefert bei den Bosonen schon die niedrigste Näherung ein nichttriviales Ergebnis.
Für n=1 folgt aus (1.63) die Gleichung:

$$\chi_2\left(\begin{smallmatrix}\bar{x} & x_1\\ \bar{\alpha} & \alpha_1\end{smallmatrix}\right) = V_{\alpha\beta\gamma\delta}\int d^4x\, G_{\bar{z}\alpha}(\bar{x}-x)\left\{-\tfrac{3}{2}F_{\alpha_1\beta}(x_1-x)\,\chi_2\left(\begin{smallmatrix}x & x\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) + \tfrac{1}{4}\chi_4\left(\begin{smallmatrix}x & x & x & x_1\\ \beta & \gamma & \delta & \alpha_1\end{smallmatrix}\right)\right\} \qquad \text{(II. 8)}$$

(Dabei wurde $\chi_0 \equiv 0$ gesetzt, was bedeutet, daß das Vakuum ohne Anwesenheit des Feldes nicht spontan in einen angeregten Zustand übergehen kann.)
Wenn wir noch $\chi_4 \equiv 0$ setzen, dann folgt aus (II. 8) im Impulsraum:

$$\left[1 - K^B(J)\right]_{\bar{z}\gamma,\alpha_1\delta}\,\hat{\chi}_2\left(\begin{smallmatrix}J\\ \gamma\delta\end{smallmatrix}\right) = 0 \qquad \text{(II. 9)}$$

Dabei ist:

$$K^B(J)_{\bar{z}\gamma,\alpha_1\delta} := -\tfrac{3}{2}\tfrac{e^2}{2}\left[-\lambda_2^1\bar{\sigma}_z^1\right]V_i\left[-i\lambda_2^1\bar{\sigma}_\alpha^1\right]_{\bar{z}\gamma}\left[V_i\right]_{\alpha_1\delta}\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\frac{(J-q)^2}{(J-q)^2}\,\frac{x^4q^\alpha}{(q^2)^2(q^2-\varkappa^2)}$$

$$\hat{\chi}_2\left(\begin{smallmatrix}J\\ \gamma\delta\end{smallmatrix}\right) := \int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}\,\chi_2\left(\begin{smallmatrix}J-q & q\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \qquad \text{(II. 10)}$$

Dieses Ergebnis stimmt bis auf den Faktor 1/2 mit dem in [2] gewonnenen Ausdruck überein, was wiederum auf einen Masseneigenwert führt, der um $\sqrt{2}$ zu groß ist. Für die Massenverhältnisse von Fermionen und Bosonen folgen damit in dieser Näherung die gleichen Werte wie bei den φ-Gleichungen. Da dies auch auf den symmetrisierten Fall der χ-Gleichungen zutrifft, erweisen sich die numerischen Ergebnisse in den niedrigsten nichttrivialen Näherungen als unempfindlich gegenüber HERMITE-Darstellung und Symmetrisierung.

Anhang III: Definitionen

Hier sollen die expliziten Darstellungen für einige im Text verwendete Abkürzungen angegeben werden.
Zunächst erhält man für die durch (2.27) und (2.28) definierten Funktionen $q_i(\frac{p^2}{\kappa^2})$ und $b_i(\frac{p^2}{\kappa^2})$ die Ausdrücke:

$$q_0(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} - \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda^2} \ln(1-\lambda-i\varepsilon) + \ln(-\lambda-i\varepsilon)$$

$$q_1(\lambda) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3\lambda} + \frac{(1-\lambda)^2(1+2\lambda)}{3\lambda^2} \ln(1-\lambda-i\varepsilon) + \left(1-\frac{2\lambda}{3}\right) \ln(-\lambda-i\varepsilon)$$

$$b_0(\lambda) = 2i\left\{2\left(1-\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda^2}\right) \ln(1-\lambda-i\varepsilon) - \ln(-\lambda-i\varepsilon) + \sqrt{\frac{\lambda-4+i\varepsilon}{\lambda}} \ln \frac{2-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)-i\varepsilon}}{2}\right. \tag{III. 1}$$

$$b_1(\lambda) = 2i\left\{\frac{2}{3\lambda} + 2\left(1-\frac{\lambda}{3}+\frac{1}{3\lambda^2}\right) \ln(1-\lambda-i\varepsilon) + \frac{\lambda-3}{3} \ln(-\lambda-i\varepsilon)\right.$$
$$\left. - \frac{\lambda-1}{3}\sqrt{\frac{\lambda-4+i\varepsilon}{\lambda}} \ln \frac{2-\lambda+\sqrt{\lambda(\lambda-4)-i\varepsilon}}{2}\right\}$$

$$\lambda := \frac{p^2}{\kappa^2}$$

Dabei wurde gesetzt:

$$f(x+i\varepsilon) \qquad \text{statt} \qquad \lim_{\varepsilon \to +0} f(x+i\varepsilon)$$

Für beliebige reelle λ gilt:

$$\ln(\lambda \pm i\varepsilon) = \ln|\lambda| \pm i\pi\,\Theta(-\lambda) \tag{III. 2}$$

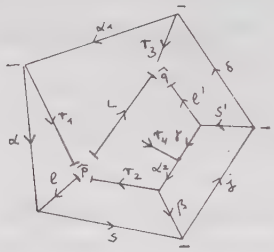
Und für beliebige (auch komplexe) λ-Werte ist die Wurzel durch:

$$\sqrt{\lambda} = \lambda^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\ln\lambda} \tag{III. 3}$$

erklärt.
Für eine systematische Darstellung der Berechnungsverfahren für FEYNMAN-Integrale s. z. B. [31].

In der Berechnung der ausreduzierten Kerne der Bosonengleichungen wurden in (4.74) und (4.76) abkürzende Bezeichnungen für die darin vorkommenden Graphen eingeführt.
Die Graphen $\mathfrak{K}^{L}_{oj}, \ldots$ sind in folgender Weise definiert. Sei zunächst:

$\mathfrak{G}^{L}_{j} :=$

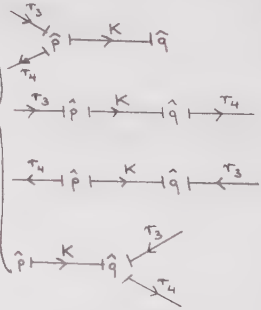


(III. 4)

Dann ist:

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{K}^{L}_{oj}\\ \mathfrak{K}^{LK}_{1j}\\ \mathfrak{K}^{LK}_{2j}\\ \mathfrak{K}^{LK}_{3j}\\ \mathfrak{K}^{LK}_{4j}\end{matrix}\right\} = (-)^{\tau_1+\tau_2}[\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4]^{1/2}\int\frac{d\vec{\hat{p}}}{4\pi}\int\frac{d\vec{\hat{q}}}{4\pi}\,\mathfrak{G}^{L}_{j}\times$$

$\delta_{\tau_3\tau_4}$ τ_3 (III. 5a)



(III. 5b)

(III. 5c)

(III. 5d)

(III. 5e)

Multiplikation von Graphen bedeutet hier, daß die entsprechenden Linien $r_1, \ldots$ zu verbinden sind.
Als Ergebnis erhält man nach Auswertung der entstehenden Graphen:

$$\mathfrak{K}^{L}_{oj} = \tfrac{1}{2}\delta_{\ell'\ell}(-)^{\ell+\ell'+s+s'+j+\tau_2+1}\frac{[\tau_3,\tau_4]^{1/2}}{[\ell]^{1/2}[\ell']^{3/2}}\sum_{x,\gamma}(-)^{x}[\gamma]\begin{Bmatrix}\tau_3 & s' & \gamma\\ \ell' & 1/2 & 1/2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}s' & \gamma & \tau_3\\ 1/2 & 1/2 & j\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}x & 1/2 & \gamma\\ j & 1/2 & s\end{Bmatrix} \qquad \text{(III. 6a)}$$

$$\times\,\delta_{\tau_1,|\ell-x|}\,\delta_{\tau_2,|\ell'-x|}\,\Delta(sx\,1/2)\,\Delta(\gamma x\,1/2)\,\Delta(\gamma\ell'\,1/2)\,\Delta(s\ell\,1/2)$$

$$\mathcal{R}^{LK}_{1j} = \frac{1}{4[\ell,L]^{1/2}} (-)^{S+s+s'+\ell'+K+\tau_1+\tau_2} \sum_{\substack{A,B,C,D \\ x,y,z}} (-)^{B+D} [x,y,z] \begin{pmatrix} z & y & K \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & j & x \\ 1/2 & A & s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} C & 1/2 & y \\ j & 1/2 & x \end{Bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} 1/2 & j & y \\ 1/2 & \ell' & s' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ell' & L & K \\ z & y & 1/2 \end{Bmatrix} \delta_{\tau_1,|\ell-A|} \delta_{\tau_2,|A-B|} \delta_{\tau_3,|L-D|} \delta_{\tau_4,|B-C|} \times \qquad \text{(III. 6b)}$$

$$\times \Delta(s\ell 1/2)\Delta(sA1/2)\Delta(xA1/2)\Delta(xB1/2)\Delta(xC1/2)\Delta(CDK)\Delta(zD1/2)\Delta(yC1/2)\Delta(zL1/2)$$

$$\mathcal{R}^{LK}_{2j} = \frac{1}{2} \frac{[\tau_2,\tau_3]^{1/2}}{[\ell,\ell']^{1/2}} (-)^{\ell'+s'+j+1/2+\tau_1+\tau_3} \sum_{\substack{A,B,C \\ x,y}} (-)^{A+C+x} [x,B]^{1/2} [C,y] \begin{pmatrix} B & K & C \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & K & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & L & \tau_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} y & s & \tau_2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} B & K & C \\ L & \tau_3 & x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} B & \tau_3 & x \\ 1/2 & y & 1/2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s & x & 1/2 \\ y & j & 1/2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_2 & s & y \\ j & 1/2 & 1/2 \end{Bmatrix} \delta_{\tau_1,|A-\ell|} \delta_{\tau_4,|\ell'-x|} \qquad \text{(III. 6c)}$$

$$\times \Delta(sA1/2)\Delta(s\ell 1/2)\Delta(AB\tau_2)\Delta(yB1/2)\Delta(s'\ell'1/2)\Delta(s'x1/2)$$

$$\mathcal{R}^{LK}_{3j} = \frac{1}{2} \frac{[\tau_2,\tau_3]^{1/2}}{[\ell]^{1/2}} (-)^{\tau_1+\tau_3+\ell'+1} \sum_{\substack{A,B,C \\ x,y,z}} (-)^{A+C+x+y+z} [x,y,z][C]^{1/2} \begin{pmatrix} C & K & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(III. 6d)}$$

$$\times \begin{pmatrix} K & \ell' & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & \tau_3 & x \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & s & \tau_2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} C & L & K \\ x & \ell' & \tau_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} z & s' & \tau_3 \\ \ell' & C & 1/2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s & 1/2 & j \\ 1/2 & y & \tau_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & z & j \\ 1/2 & y & B \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s' & 1/2 & j \\ 1/2 & z & \tau_3 \end{Bmatrix} \times$$

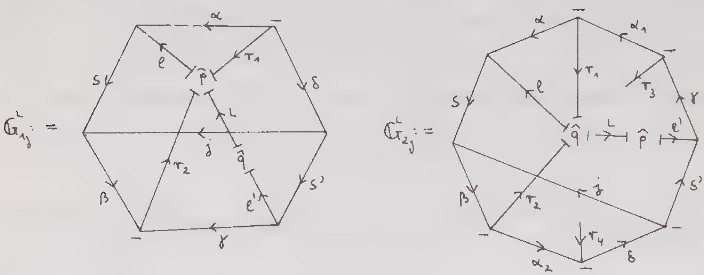
$$\times \delta_{\tau_1,|\ell-A|} \delta_{C,|B-\tau_4|} \Delta(s\ell 1/2)\Delta(sA1/2)\Delta(AB\tau_2)\Delta(yB1/2)\Delta(zB1/2)\Delta(z\tau_4 1/2)$$

$$\mathcal{R}^{LK}_{4j} = \frac{[\tau_4]^{1/2}}{2\sqrt{2}[\ell,\ell']^{1/2}} (-)^{\tau_1+\tau_2+\tau_3+\ell'+s+s'+1} \sum_{\substack{A,B,x,y \\ a,b}} (-)^{x+y+B+b+1/2} [x,B]^{1/2} [a,b,y] \qquad \text{(III. 6e)}$$

$$\times \begin{pmatrix} B & K & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & x & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & \tau_4 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} B & L & K \\ y & \tau_4 & x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} B & x & \tau_4 \\ 1/2 & 1/2 & b \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & b & j \\ 1/2 & a & x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & s' & j \\ 1/2 & a & \ell' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1/2 & s & j \\ 1/2 & b & A \end{Bmatrix} \times$$

$$\times \delta_{\tau_1,|\ell-A|} \delta_{\tau_2,|A-B|} \delta_{\tau_3,|\ell'-x|} \Delta(s\ell 1/2)\Delta(sA1/2)\Delta(bA1/2)\Delta(bB1/2)\Delta(a\ell'1/2)\Delta(ax1/2)$$

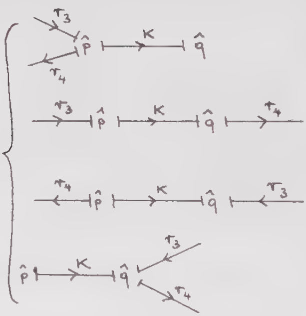
Die in (4.74) auftretenden Graphen $g^L_{1j}, \ldots$ sind analog definiert. Zunächst setzen wir:



(III. 7)

Dann ist:

$$\left.\begin{array}{l} g^{KL}_{1j} \\ g^{KL}_{2j} \\ g^{KL}_{3j} \\ g^{KL}_{4j} \end{array}\right\} = (-)^{\tau_1+\tau_2} [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4]^{1/2} \int \frac{d\vec{\hat{p}}}{4\pi} \int \frac{d\vec{\hat{q}}}{4\pi} \, G^{L\,*}_{2j} \left\{ \begin{array}{l} \text{(III. 8a)} \\ \text{(III. 8b)} \\ \text{(III. 8c)} \\ \text{(III. 8d)} \end{array} \right.$$



(III. 8a)
(III. 8b)
(III. 8c)
(III. 8d)

Und schließlich:

$$\left.\begin{array}{l} g^{L}_{1j} \\ g^{L}_{2j} \end{array}\right\} = (-)^{\tau_1+\tau_2} [\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4]^{1/2} \int \frac{d\vec{\hat{p}}}{4\pi} \int \frac{d\vec{\hat{q}}}{4\pi} \left\{ \begin{array}{ll} \delta_{\tau_3\tau_4} \, G^L_{2j} \xrightarrow{\tau_3} & \text{(III. 8e)} \\ G^L_{1j} & \text{(III. 8f)} \end{array} \right.$$

Nach Auswertung erhalten wir daraus:

$$\mathcal{G}^{KL}_{1j} = \tfrac{1}{2}(-)^{\tau_2}\frac{[\tau_4]^{1/2}}{[\ell']^{1/2}}\begin{pmatrix}\ell & K & L\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\ell' & K & L\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sum_x (-)^{1/2-x}[x]\begin{Bmatrix}S & \tau_2 & x\\ 1/2 & j & 1/2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}j & 1/2 & x\\ \tau_4 & S' & 1/2\end{Bmatrix}\times$$
$$\times\begin{pmatrix}x & S' & \tau_4\\ 1/2 & -1/2 & 0\end{pmatrix}\sum_{A,B,C,\gamma}(-)^{A+1/2-\gamma}[\gamma]\begin{Bmatrix}S & x & \tau_2\\ \gamma & 1/2 & \ell\end{Bmatrix}\begin{pmatrix}\gamma & x & \ell\\ 1/2 & -1/2 & 0\end{pmatrix}\delta_{\tau_1,|\tau_2-A|}\delta_{\tau_3,|B-A|} \qquad \text{(III. 9a)}$$
$$\times\Delta(\gamma\tau_2\,1/2)\,\Delta(\gamma A\,1/2)\,\Delta(\gamma B\,1/2)\,\Delta(xC\,1/2)\,\Delta(C\,B\,\ell)\,\Delta(\ell' C\,\tau_4)$$

$$\mathcal{G}^{KL}_{2j} = \tfrac{1}{2}(-)^{L+K+\ell+S-1/2}\frac{[\tau_4]^{1/2}}{[\ell,\ell']^{1/2}}\sum_x [x]\begin{Bmatrix}S & \tau_2 & x\\ 1/2 & j & 1/2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}j & 1/2 & x\\ \tau_4 & S' & 1/2\end{Bmatrix}\begin{pmatrix}x & S' & \tau_4\\ 1/2 & -1/2 & 0\end{pmatrix}\times$$
$$\times\sum_{A,B,C,\gamma}(-)^{A+B}[\gamma][C]^{1/2}\begin{pmatrix}S & x & C\\ 1/2 & -1/2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L & K & C\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2\begin{Bmatrix}x & \tau_2 & 1/2\\ \gamma & B & 1/2\end{Bmatrix}\delta_{\tau_1,|\tau_2-A|}\delta_{\tau_3,|A-B|} \qquad \text{(III. 9b)}$$
$$\times\Delta(\gamma\tau_2\,1/2)\,\Delta(\gamma A\,1/2)\,\Delta(\gamma B\,1/2)\,\Delta(xB\,1/2)\,\Delta(xC\,1/2)\,\Delta(B\,\ell\,C)$$

$$\mathcal{G}^{KL}_{3j} = \tfrac{1}{2}(-)^{L+K-S+1+\tau_3+\tau_4+\ell'+S'}\frac{[\tau_4]^{1/2}}{[\ell',L,K]^{1/2}}\sum_x [x]\begin{Bmatrix}S & \tau_2 & x\\ 1/2 & j & 1/2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}j & 1/2 & x\\ \tau_4 & S' & 1/2\end{Bmatrix}$$
$$\times\sum_{\substack{A,B,C\\ t,u,\gamma,z}}(-)^{A+\gamma+z+u-t}[B,C,t,u]\begin{pmatrix}t & z & B\\ 1/2 & -1/2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u & S' & K\\ 1/2 & -1/2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L & \tau_4 & C\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{(III. 9c)}$$
$$\times\begin{pmatrix}\ell & x & z\\ \tau_2 & 1/2 & s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}C & \ell & B\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}L & \tau_4 & C\\ x & t & S'\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\ell & x & z\\ t & B & C\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}L & t & S'\\ K & u & 1/2\end{Bmatrix}\delta_{\tau_1,|\tau_2-A|}\delta_{\tau_3,|L-\gamma|}$$
$$\times\Delta(z A\,1/2)\,\Delta(z\tau_2\,1/2)\,\Delta(u\gamma\,1/2)\,\Delta(uL\,1/2)\,\Delta(AKB)\,\Delta(tK\,1/2)\,\Delta(\ell'\gamma K)$$

$$\mathcal{G}^{KL}_{4j} = \tfrac{1}{2}(-)^{\ell'+\tau_1+\tau_2+\tau_3+L+K}\frac{[\tau_4]^{1/2}}{[\ell,\ell']^{1/2}}\sum_x (-)^{1/2+x}\begin{Bmatrix}S & \tau_2 & x\\ 1/2 & j & 1/2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}j & 1/2 & x\\ \tau_4 & S' & 1/2\end{Bmatrix}\times \qquad \text{(III. 9d)}$$
$$\times\sum_{A,B,C,\gamma}(-)^{A+C+\gamma+1/2}[B]^{1/2}[\gamma]\begin{pmatrix}L & K & B\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}S' & x & \tau_4\\ 1/2 & -1/2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma & S & B\\ 1/2 & -1/2 & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}\tau_2 & x & S\\ B & \gamma & 1/2\end{Bmatrix}$$
$$\times\delta_{\tau_1,|\tau_2-C|}\,\delta_{\tau_3,|A-B|}\,\Delta(A\ell'\tau_4)\,\Delta(xA\,1/2)\,\Delta(xB\,1/2)\,\Delta(y\tau_2\,1/2)\,\Delta(yC\,1/2)\,\Delta(\ell C B)$$

$$\mathcal{G}^{L}_{1j} = \delta_{\ell' L}(-)^{\tau_3+\tau_4+\ell'}\frac{[\tau_2,\tau_3,\tau_4]^{1/2}}{[\ell']^{3/2}[\ell,S,1/2]^{1/2}}\sum_\gamma (-)^{\gamma}[\gamma]^{1/2}\sum_x [x](-)^{1/2-x}\delta_{\tau_3,|\ell-\gamma|}\times \qquad \text{(III. 9e)}$$
$$\times\begin{pmatrix}S & x & \tau_2\\ 1/2 & -1/2 & 0\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}S & x & \tau_2\\ 1/2 & 1/2 & j\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\tau_4 & S' & x\\ j & 1/2 & 1/2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\tau_3 & S' & x\\ \ell' & 1/2 & 1/2\end{Bmatrix}$$

$$\mathcal{Y}^{L}_{2j} = \frac{1}{2}\,\delta_{\ell' L}\,\frac{(-)^{\ell'+s'-1/2}}{[\ell']^{3/2}\,[\ell]^{1/2}}\sum_{x}\delta_{\tau_1,1\ell-x1}\,\delta_{\tau_2,1\ell'-x1}\begin{Bmatrix} s & x & 1/2 \\ s' & j & 1/2 \end{Bmatrix} \tag{III. 9f}$$

Anhang IV: Bezeichnungen

Einheiten: $\hbar = c = 1$

Benutzte Metrik: $g_{oo} = - g_{ii} = 1, \quad i=1,2,3.$

Es wird die EINSTEINsche Summenkonvention benutzt, wobei griechische Indizes die Werte 0, 1, 2, 3 und lateinische die Werte 1, 2, 3 durchlaufen.

Koordinaten: Raum-Zeit-Koordinaten x, y, z, ...

$$x = (t , \vec{x})$$

Energie-Impuls-Vektoren p, q, r, ...

$$p = (p^{o} , \vec{p})$$

Der Stern * bedeutet die komplexe Konjugation einer c-Zahl und die hermitesche Konjugation einer q-Zahl.

Kommutator: $[A,B] \equiv [A,B]_{-} := AB - BA$

Anti-Kommutator: $\{A,B\} \equiv [A,B]_{+} := AB + BA$

SpA bedeutet die Spur des Operators bzw. der Matrix A.

Die PAULIschen Spin-Matrizen werden in der üblichen Darstellung verwendet.

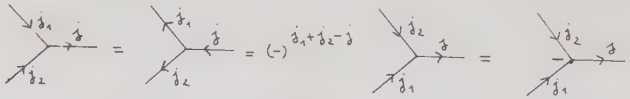
$$\vec{\sigma} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Mit $\sigma^{o} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist dann:

$$\sigma^{\mu} = (\sigma^{o}, \vec{\sigma})$$

$$\bar{\sigma}^{\mu} = (\sigma^{o}, -\vec{\sigma})$$

Für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten benutzen wir die graphische Darstellung von DÜRR und WAGNER [8]:



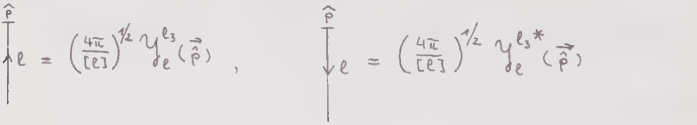
$$= (-)^{j_1 - j_2 + m} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} = \frac{1}{[j]^{1/2}} \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j m \rangle$$

(Normale Vertizes sind im Gegenuhrzeigersinn, mit einem Minuszeichen versehene, die durch Vertauschung gleichorientierter Linien entstehen, im Uhrzeigersinn zu lesen.)
Ferner benutzen wir die Abkürzung:

$$(2j_1+1)(2j_2+1)\ldots = : [j_1, j_2, \ldots]$$

für die Drehimpuls-Multiplizitätsfaktoren.

Kugelflächenfunktionen werden durch:



$$\vec{\hat{p}} := \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \qquad d\vec{\hat{p}} = d\Omega_{\vec{p}}$$

dargestellt.

Es ist oft von Vorteil für Größen, die sich wie Vierervektoren transformieren, sphärische Koordinaten einzuführen. Für den kontravarianten Vierervektor p^μ schreiben wir:

$$p^\mu \leftrightarrow p^{\tau\tau_3} = p^\tau e^{\tau\tau_3} = p^\tau \left(\frac{4\pi}{[\tau]}\right)^{1/2} Y_\ell^{\ell_3}(\vec{\hat{p}}) = \begin{cases} p^0 & \tau = 0 \\ |\vec{p}| \begin{cases} -\sin\Theta\, e^{i\varphi} \\ \cos\Theta \\ \sin\Theta\, e^{-i\varphi} \end{cases} & \tau = 1 \begin{cases} \tau_3 = 1 \\ \tau_3 = 0 \\ \tau_3 = -1 \end{cases} \end{cases}$$

$$p^\tau = \begin{cases} p^0 & \tau = 0 \\ |\vec{p}| & \tau = 1 \end{cases}$$

Analog für die kovarianten Komponenten:

$$p_\mu \leftrightarrow p_{\tau\tau_3} = p_\tau e_{\tau\tau_3} = p_\tau \left(\frac{4\pi}{[\tau]}\right)^{1/2} Y_\tau^{\tau_3 *}(\vec{p}) \,, \qquad p_\tau = \begin{cases} p^0 & \tau = 0 \\ -|\vec{p}| & \tau = 1 \end{cases}$$

Für den Übergang zwischen kontravarianten und kovarianten Komponenten gilt:

$$p_\tau = (-)^\tau p^\tau$$

$$e_{\tau\tau_3} = (-)^{\tau_3} e^{\tau - \tau_3}$$

$$p_{\tau\tau_3} = (-)^{\tau+\tau_3} p^{\tau-\tau_3}$$

Für die Rechnungen ist es nützlich, auch die PAULI-Matrizen in sphärischen Koordinaten darzustellen. In dieser Darstellung sind sie im wesentlichen gleich bestimmten Clebsch-Gordan-Koeffizienten:

$$(\sigma^\mu)_{\alpha\beta} \leftrightarrow (\sigma^{\tau\tau_3})_{\alpha\beta} = [\tau]^{1/2} \langle \tfrac{1}{2}\beta\, \tau\tau_3 \,|\, \tfrac{1}{2}\alpha \rangle = [\tau, \tfrac{1}{2}]^{1/2}$$

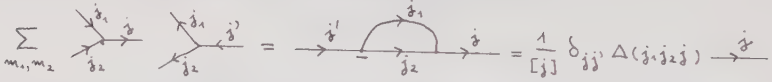
$$(\sigma_\mu)_{\alpha\beta} \leftrightarrow (\sigma_{\tau\tau_3})_{\alpha\beta} = (-)^\tau [\tau]^{1/2} \langle \tfrac{1}{2}\alpha\, \tau\tau_3 \,|\, \tfrac{1}{2}\beta \rangle = [\tau, \tfrac{1}{2}]^{1/2}$$

$$(\bar{\sigma}^\mu)_{\alpha\beta} \leftrightarrow (\bar{\sigma}^{\tau\tau_3})_{\alpha\beta} = (-)^\tau (\sigma^{\tau\tau_3})_{\alpha\beta}$$

$$(\bar{\sigma}_\mu)_{\alpha\beta} \leftrightarrow (\bar{\sigma}_{\tau\tau_3})_{\alpha\beta} = (-)^\tau (\sigma_{\tau\tau_3})_{\alpha\beta}$$

Wie oben werden wir auch im folgen den Spin-1/2-Linien durch die magnetische Quantenzahl charakterisieren. Das ist zwar inkonsequent, führt aber an keiner Stelle zu Diskrepanzen.

Clebsch-Gordan-Koeffizienten und PAULI-Matrizen werden sowohl gegenseitig als auch untereinander durch Verbindung gleichsinnig orientierter Linien verkoppelt, wobei eine verbundene Linie eine Summation über die zugehörige magnetische Quantenzahl bedeutet. Man gelangt so zu komplizierteren Graphen, die nach den in [8] dargestellten Regeln ausgewertet werden können, und schließlich Summen über Produkte von Clebsch-Gordan-Koeffizienten und WIGNERschen 6j-Symbolen ergeben.
Als einfaches Beispiel sei die Orthogonalitätsrelation für Clebsch-Gordan-Koeffizienten in Graphenform angegeben:



Dabei ist das oft benutzte Symbol $\Delta(j_1 j_2 j)$ definiert durch:

$$\Delta(j_1 j_2 j) := \begin{cases} 1 & |j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

d.h. es ergibt nur dann nicht Null, wenn die drei Drehimpulse j_1, j_2, j die Dreiecksungleichung erfüllen.

Literatur

[1] W. Heisenberg

Einführung in die einheitliche Feldtheorie der Elementarteilchen, Stuttgart 1967.

[2] H.P. Dürr, F. Wagner

Nonlinear Theory with Hermitean Spinor Field Operators, Nuovo Cimento, Vol. XLVI A, 223 (1966).

[3] D. Maison, H. Stumpf

On the field theoretic functional calculus for the anharmonic oscillator I, Z.f. Naturf. 21a, 1829 (1966).

[4] H. Rampacher, H. Stumpf, F. Wagner

Fortschr. d. Physik, 13, 385 (1965).

[5] W. Heisenberg

Nachr. Gött. Akad. Wiss. 111 (1953).

[6] H. Stumpf, F. Wagner, F. Wahl

Z.f. Naturf. 19a, 1254 (1964).

[7] W. Schuler

Feldtheoretischer Funktionalkalkül des anharmonischen Oszillators in niederen Näherungen, Dissertation, Universität Tübingen, 1968.

[8] H.P. Dürr, F. Wagner

Graphical methods for the execution of the σ - and γ-Algebra in spinor theories, Nuovo Cimento, Vol LIII A, N. 1 (1968).

[9] A. Yutzis, I.B. Levinson, V.V. Vanagas

Mathematical Apparatus of the Theory of Angular Momentum, Jerusalem, 1962, transl. from Russian.

[10] B.L. van-der-Waerden

Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Edwards, Ann Arbor, Michigan, 1944.

[11] M. Fierz

Z.f. Physik, 104, 553 (1957).

[12] G. Lüders

Kong. Dansk. Vid. Selskab. Mat. Fys. Medd. 28, N. 5 (1954), Ann. Phys, 2, 1 (1957).

[13] W. Pauli

Niels Bohr and the development of Physics, McGraw Hill, New York, 1955.

[14] J. Schwinger

Phys. Rev. 91, 713 (1953).

[15] H. P. Dürr

Proceedings of the Seminar on Unified Theories, Rochester, 1963.

[16] W. Schuler, H. Stumpf

On the field theoretic functional calculus for the anharmonic oscillator II u. III,
Z.f. Naturf. 22a, Heft 12 (1967),
Z.f. Naturf. 23a, 902 (1968).

[17] H. Stumpf

On the field theoretic functional calculus for the anharmonic oscillator IV, Z.f. Naturf., in Vorbereitung.

[18] K.O. Friedrichs, H.N. Shapiro

Seminar on Integration of Functionals, New York University, 1957.

[19] F. Wagner

Zur Konvergenz der einzeitigen neuen Tamm-Dancoff -Methode beim anharmonischen Oszillator, Dissertation, Universität München, 1966.

[20] H.P. Dürr, F. Wagner

The mass eigenvalue problem for baryons in the nonlinear spinor theory, Nuovo Cimento, Vol. LIV A, N.3 (1968).

[21] F. Bloch, A. Nordsieck

Phys. Rev. 52, 54 (1937).

[22] E. P. Wigner

Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group, Ann. Math. 40, 149 (1939).

V. Bargmann

Ann. Math 48, 568 (1947).

[23] H. Joos

Zur Darstellungstheorie der inhomogenen Lorentzgruppe als Grundlage quantenmechanischer Kinematik, Fortschr. d. Physik, 10, 65 (1962).

[24] A. Erdelyi

Higher Transcedental Functions, Kap. 10.8., McGraw Hill, New York, 1953.

[25] G. W. Mackey

The Theory of Group Representations, Mimeographed Notes, Department of Mathematics, University of Chicago, 1955.

[26] S. Weinberg

Brandeis Lectures, 1964.

[27] A. J. Mac Farlane

J. Math. Phys. 4, 404 (1962).

[28] F. A. Berezin

The Method of Second Quantization, New York, London, 1966.

[29] B. L. v. d. Waerden

Algebra, Springer, Berlin, 1967.

[30] I. M. Gelfand, N. Y. Vilenkin

Generalized Functions, Vol. 2, Academic Press, New York, 1964.

[31] E. z. Linden

Methoden zur Berechnung von Feynman-Integralen, Diplomarbeit, München, 1967.

Lebenslauf

Ich wurde am 20. Dezember 1941 als Sohn des damaligen Feldwebels der Luftwaffe Georg Märtl und seiner Ehefrau Annemarie, geb. Schilling, in Berlin geboren. Infolge des Krieges zog meine Familie 1944 nach Bayern. Vom Herbst 1947 bis zum Herbst 1954 besuchte ich die Volksschulen in Neu-Ulm und Buchloe bis zur 7. Klasse und trat anschließend in die 1. Klasse der kaufmännischen Mittelschule in Buchloe ein, die ich nach der 3. Klasse mit dem Zeugnis der mittleren Reife verließ. Im Herbst 1957 trat ich in die 6. Klasse des musischen Gymnasiums in Lauingen/Do. ein, wo ich im Juli 1961 die Reifeprüfung mit Erfolg ablegte. Im Wintersemester 1961/62 begann ich an der Universität München Physik zu studieren. Als meinen akademischen Lehrern bin ich vor allem den Professoren Bopp, Brandmüller, Dürr, Faessler, Heisenberg, Richter, Schlüter und Stumpf verpflichtet. Im Sommersemester 1964 legte ich die Diplom-Vorprüfung in Physik ab und begann im Wintersemester 1964/65 als Zweitstudium Jurisprudenz zu studieren. Im Mai 1966 erhielt ich von Herrn Prof. Dr. H. Stumpf eine Diplomarbeit in theoretischer Festkörperphysik. Nach Abschluß der Arbeit im Juli 1967 bestand ich im selben Monat die Diplom-Hauptprüfung für Physiker.
Seit 1. August 1967 bin ich am Institut für theoretische Physik der Universität Tübingen angestellt. Zuerst als wissenschaftliche Hilfskraft, seit 1. Febraur 1968 als Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle. Vom September 1967 bis Dezember 1968 war ich mit der Abfassung einer Dissertation mit dem Thema

> "Zur gruppentheoretischen Ausreduktion niederer Näherungen in der funktionalen nichtlinearen Spinortheorie der Elementarteilchen"

unter der Anleitung von Herrn Prof. Dr. H. Stumpf beschäftigt.

Tübingen, im Januar 1969

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 51
Telefon 29 56 81

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 51
Telefon 29 56 81